Matemática Superior para Engenharia

ERWIN KREYSZIG

Volume 2

9ª EDIÇÃO

LTC

PARTE C

Análise de Fourier. Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

CAPÍTULO 11 Séries, Integrais e Transformadas de Fourier
CAPÍTULO 12 Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

A análise de Fourier relaciona-se aos **fenômenos periódicos**, que ocorrem com bastante freqüência em engenharia e outras aplicações — considere, por exemplo, as peças rotativas de máquinas, as correntes elétricas alternadas ou o movimento dos planetas. As funções periódicas relacionadas a esses fenômenos podem ser complicadas. Tal situação impõe a importante tarefa prática de representar essas funções complicadas por meio de funções periódicas simples, a saber, de senos e cossenos. Essas representações serão as séries infinitas, chamadas de **séries de Fourier**.[1]

A criação dessas séries foi um dos eventos mais decisivos da matemática aplicada, e vale dizer que também exerceu uma considerável influência na matemática como um todo, no que se refere ao conceito de função, à teoria da integração, à teoria da convergência das séries etc. (veja a Ref. [GR7] no Apêndice 1).

O Capítulo 11 trata principalmente das séries de Fourier. Entretanto, as idéias subjacentes podem também ser estendidas a fenômenos *não-periódicos*. Isso leva às *integrais* e *transformadas de Fourier*. Um nome comum para toda essa área é **análise de Fourier**.

O Capítulo 12 trata das **equações diferenciais parciais (EDPs)** mais importantes da física e da engenharia. Esta é a área onde a análise de Fourier tem suas aplicações mais fundamentais, relacionadas a problemas de limite e de valor inicial em mecânica, fluxo de calor, eletrostática e outros campos.

[1] JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830), físico e matemático francês, que viveu e lecionou em Paris, acompanhou Napoleão na Guerra do Egito e foi posteriormente prefeito de Grenoble. Os tópicos iniciais sobre as séries de Fourier podem ser encontrados nos trabalhos de Euler e de Daniel Bernoulli, porém foi Fourier quem os empregou de um modo sistemático e geral em seu trabalho principal, *Théorie analytique de la chaleur* (*Teoria Analítica do Calor*, Paris, 1822), onde desenvolveu a teoria da condução do calor (equação do calor; veja a Seção 12.5), fazendo dessas séries uma das ferramentas mais importantes da matemática aplicada.

CAPÍTULO 11

Séries, Integrais e Transformadas de Fourier

As **séries de Fourier** (Seção 11.1) são séries infinitas concebidas para representar funções periódicas gerais em termos de funções simples, a saber, de senos e cossenos. Elas constituem uma ferramenta muito importante, especialmente na solução de problemas envolvendo EDOs e EDPs.

Neste capítulo, discutiremos as séries de Fourier e seu uso em engenharia de um ponto de vista prático, em conexão com as EDOs e com a aproximação das funções periódicas. A aplicação disso nas EDPs é apresentada no Capítulo 12.

A *teoria* das séries de Fourier é complicada, embora veremos que a *aplicação* destas séries é um tanto simples. As séries de Fourier são, num certo sentido, mais universais que as conhecidas séries de Taylor do cálculo, porque muitas funções periódicas *descontínuas* de interesse prático podem ser desenvolvidas em séries de Fourier, porém, naturalmente, não têm representações em séries de Taylor.

Nas últimas seções (11.7–11.9) consideraremos as **integrais de Fourier** e as **transformadas de Fourier**, que estendem as idéias e técnicas das séries de Fourier às funções não-periódicas e que têm aplicações fundamentais nas EDPs (o que será mostrado no próximo capítulo).

Pré-requisito: cálculo integral elementar (necessário para os coeficientes de Fourier)
Seções que podem ser omitidas num curso mais curto: 11.4–11.9
Referências e Respostas dos Problemas: Parte C do Apêndice 1 e Apêndice 2.

11.1 Séries de Fourier

As séries de Fourier são a ferramenta básica para se representar as funções periódicas, as quais desempenham um importante papel nas aplicações. Uma função $f(x)$ é chamada de **função periódica** se $f(x)$ for definida para todo x real (talvez exceto em alguns pontos, como $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$ para $\tan x$) e se existir algum número p positivo, denominado **período** de $f(x)$, tal que

$$f(x + p) = f(x) \qquad \text{para todo } x. \tag{1}$$

O gráfico de uma função assim é obtido pela repetição periódica de seu gráfico num intervalo qualquer de comprimento p (Fig. 255).

Funções periódicas conhecidas são as funções do seno e cosseno. Exemplos de funções que não são periódicas são x, x^2, x^3, e^x, $\cosh x$, e $\ln x$, para mencionarmos apenas algumas.

Se $f(x)$ tem período p, ela também tem o período $2p$, pois (1) implica que $f(x + 2p) = f([x + p] + p) = f(x + p) = f(x)$, etc.: portanto, para qualquer inteiro $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$f(x + np) = f(x) \qquad \text{para todo } x. \tag{2}$$

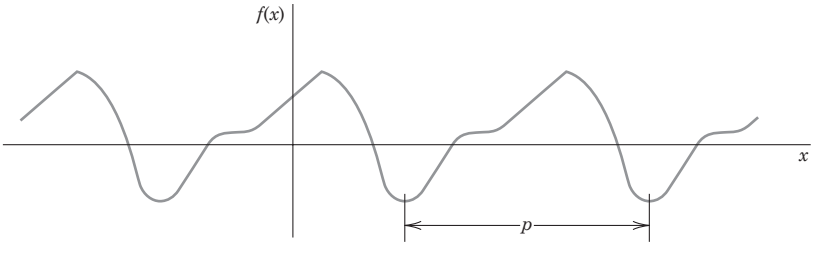


Fig. 255. Função periódica

Além disso, se $f(x)$ e $g(x)$ têm período p, então $af(x) + bg(x)$ com quaisquer constantes a e b também tem o período p.

Nosso problema nas primeiras seções deste capítulo será representar várias ***funções f(x)* de período 2π** em termos das funções simples

$$(3) \qquad 1, \quad \cos x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos 2x, \quad \operatorname{sen} 2x, \cdots, \quad \cos nx, \quad \operatorname{sen} nx, \cdots.$$

Todas essas funções têm o período 2π. Elas constituem o chamado **sistema trigonométrico**. A Fig. 256 mostra as primeiras delas (exceto para a constante 1, que é periódica com qualquer período).

A série a ser obtida será uma **série trigonométrica**, ou seja, uma série da forma

$$(4) \qquad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ são constantes, chamadas de **coeficientes** da série. Observamos que cada termo tem o período 2π. Logo, *se os coeficientes são tais que a série convirja, sua soma será uma função de período* 2π.

Pode-se demonstrar que, se a série no lado esquerdo de (4) convergir, então a inserção de parênteses à direita fornece uma série que converge e que tem a mesma soma da série à esquerda. Isso justifica a igualdade em (4).

Agora suponha que $f(x)$ seja uma dada função de período 2π e seja tal que possa ser **representada** por uma série (4), ou seja, (4) converge e, além disso, possui a soma $f(x)$. Então, usando o sinal de igualdade, escrevemos

$$\textbf{(5)} \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

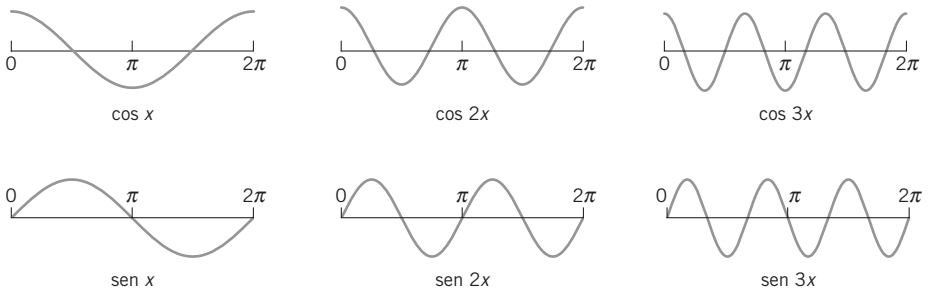


Fig. 256. Funções cosseno e seno de período 2π

e dizemos que (5) é a **série de Fourier** de $f(x)$. Provaremos que, neste caso, os coeficientes de (5) são os chamados **coeficientes de Fourier** de $f(x)$, dados pelas **fórmulas de Euler**

$$\textbf{(6)} \qquad \textbf{(a)} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$\textbf{(b)} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$\textbf{(c)} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

O nome "série de Fourier" é às vezes também usado no caso excepcional em que (5), com os coeficientes (6), não converge ou não tem a soma $f(x)$ — isso pode acontecer, embora tenha um interesse meramente teórico. (Sobre Euler, veja a nota de rodapé 4 na Seção 2.5.)

Um Exemplo Básico

Antes de obtermos as fórmulas de Euler (6), vamos nos familiarizar com a aplicação de (5) e de (6) para o caso de um exemplo importante. Como você trabalhará com outras funções similares a esta, tente compreender totalmente cada detalhe das integrações, as quais, devido ao n envolvido, diferem um tanto das que você já praticou no cálculo. Você deve evitar o uso rotineiro do computador, preferindo, ao invés disso, fazer observações: de que

modo funções contínuas (cossenos e senos) podem representar uma dada função descontínua? Como a qualidade da aproximação aumenta à medida que consideramos um número crescente de termos da série? Por que as funções de aproximação, chamadas de **somas parciais** da série, são sempre nulas em 0 e π? Por que o fator $1/n$ (obtido na integração) é importante?

EXEMPLO 1 Onda Retangular Periódica (Fig. 257a)

Encontre os coeficientes de Fourier da função periódica $f(x)$ na Fig. 257a. A fórmula é

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ k & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f(x + 2\pi) = f(x). \tag{7}$$

As funções desse tipo ocorrem como forças externas agindo em sistemas mecânicos, forças eletromotrizes em circuitos elétricos etc. (O valor de $f(x)$ em um único ponto não afeta a integral; logo, podemos deixar $f(x)$ indefinida em $x = 0$ e $x = \pm\,\pi$.)

Solução. De (6a), obtemos $a_0 = 0$. Também podemos ver isto sem integração, pois a área sob a curva $f(x)$ entre $-\pi$ e π é nula. De (6b),

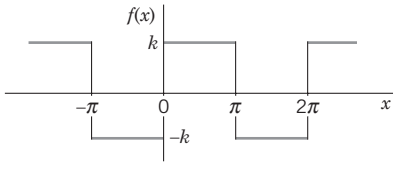
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} k\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\,\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + k\,\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right] = 0$$

porque $\operatorname{sen} nx = 0$ em $-\pi$, 0 e π para todo $n = 1, 2, \cdots$. Similarmente, de (6c), obtemos

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{0}^{\pi} k\operatorname{sen} nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[k\,\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} - k\,\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right].$$



(a) A função dada $f(x)$ (onda retangular periódica)

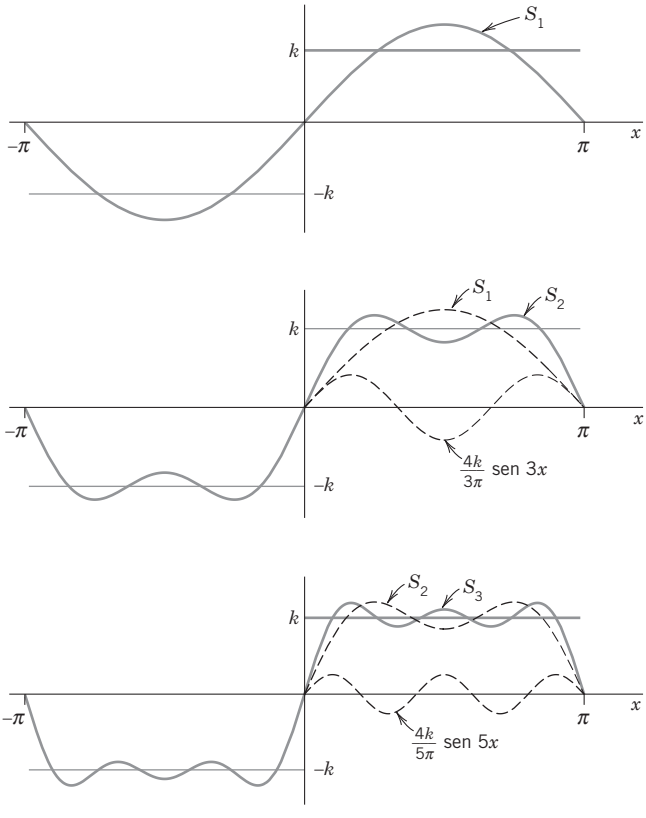


Fig. 257. Exemplo 1

(b) As três primeiras somas da série de Fourier correspondente

Como cos (–α) = cos α e cos 0 = 1, isto fornece

$$b_n = \frac{k}{n\pi}\,[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi}\,(1 - \cos n\pi).$$

Ora, cos π = –1 cos 2π = 1, cos 3π = –1 etc.; em geral,

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ 1 & \text{para } n \text{ par,} \end{cases} \quad \text{e, portanto,} \quad 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ 0 & \text{para } n \text{ par,} \end{cases}$$

Como os coeficientes de Fourier b_n de nossa função são

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \qquad b_4 = 0, \qquad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \cdots.$$

Como os a_n são nulos, a série de Fourier de $f(x)$ é

$$\frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right). \tag{8}$$

As somas parciais são

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\operatorname{sen} x, \qquad S_2 = \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right), \qquad \text{etc.,}$$

Seus gráficos na Fig. 257 parecem indicar que a série é convergente e tem a soma $f(x)$, a função dada. Notemos que, em $x = 0$ e em $x = \pi$, os pontos de descontinuidade de $f(x)$, todas as somas parciais valem zero, que é a média aritmética dos limites $-k$ e k da nossa função nesses pontos.

Além disso, supondo que $f(x)$ seja a soma da série e fazendo $x = \pi/2$, temos

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots\right).$$

portanto,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Este é um famoso resultado obtido por Leibniz em 1673 a partir de considerações geométricas, e ilustra o fato de que os valores de várias séries com termos constantes podem ser obtidos avaliando-se as séries de Fourier em pontos específicos. ■

Demonstração das Fórmulas de Euler (6)

A chave para as fórmulas de Euler (6) é a **ortogonalidade** de (3), um conceito de importância fundamental, como se segue.

TEOREMA 1

Ortogonalidade do Sistema Trigonométrico (3)

O sistema trigonométrico (3) *é ortogonal no intervalo* $-\pi \leqq x \leqq \pi$ (logo, também no intervalo $0 \leqq x \leqq 2\pi$ ou em qualquer outro intervalo de comprimento 2π, devido à periodicidade); *ou seja, a integral do produto de duas funções quaisquer em* (3) *sobre esse intervalo vale* 0, *de modo que, para quaisquer n e m inteiros,*

$$\textbf{(a)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0 \qquad (n \neq m)$$

$$\textbf{(b)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = 0 \qquad (n \neq m) \tag{9}$$

$$\textbf{(c)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx = 0 \qquad (n \neq m \text{ ou } n = m).$$

PROVA A demonstração disso é feita por uma simples transformação trigonométrica dos integrandos, passando-os de produtos para somas. Em (9a) e (9b), por (11) do Apêndice A3.1,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\, dx.$$

Como $m \neq n$ (inteiro!), as integrais no lado direito são todas iguais a 0. Similarmente, em (9c), para todos os m e n inteiros (sem exceção; você pode ver por quê?),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)x\, dx = 0 + 0.$$ ■

Aplicação do Teorema 1 à Série de Fourier (5)

Provemos (6a). Em (5), integrando de $-\pi$ a π em ambos os lados, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right] dx.$$

Suponhamos agora que seja possível integrar termo a termo. (Na prova do Teorema 2, diremos quando isso é verdadeiro.) Então, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx \right).$$

O primeiro termo no lado direito é igual a $2\pi a_0$. A integração mostra que todas as outras integrais são nulas. Logo, a divisão por 2π fornece (6a).

Provemos (6b). Multiplicando (5) em ambos os lados por cos mx com qualquer inteiro positivo ***fixo*** m e integrando de $-\pi$ a π, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right] \cos mx\,dx. \tag{10}$$

Agora, integramos termo a termo. Então, no lado direito, obtemos uma integral de $a_0 \cos mx$, que vale 0; uma integral de $a_n \cos nx \cos mx$, que é igual a $a_m\pi$ para $n = m$ e 0 para $n \neq m$ segundo (9a); e uma integral de $b_n \operatorname{sen} nx \cos mx$, que é 0 para todo n e m segundo (9c). Logo, o lado direito de (10) é igual a $a_m\pi$. Dividindo por π, obtemos (6b) (com m no lugar de n).

Finalmente, provemos (6c). Multiplicando (5) em ambos os lados por sen mx com qualquer inteiro positivo ***fixo*** m e integrando de $-\pi$ a π, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right] \operatorname{sen} mx\,dx. \tag{11}$$

Integrando termo a termo, obtemos no lado direito uma integral de $a_0 \operatorname{sen} mx$, que é 0; uma integral de $a_n \cos nx \operatorname{sen} mx$, que é 0 por (9c); e uma integral $b_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx$, que é $b_m\pi$ se $n = m$ e 0 se $n \neq m$, por (9b). Isto implica (6c) (com n representado por m) e completa a prova das fórmulas de Euler (6) para os coeficientes de Fourier. ■

Convergência e Soma de uma Série de Fourier

A classe das funções que podem ser representadas por séries de Fourier é surpreendentemente grande e geral. As condições de suficiência válidas na maioria das aplicações são as seguintes.

TEOREMA 2

Representação por Séries de Fourier

Consideremos que $f(x)$ seja periódica, tenha o período 2π e seja contínua por intervalos (veja a Seção 6.1) *no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$. Além disso, consideremos que $f(x)$ possua derivadas tanto à esquerda quanto à direita de cada ponto desse intervalo. Então, a série de Fourier* (5) *de $f(x)$* [com os coeficientes (6)] *converge. Sua soma é $f(x)$, excetuando-se nos pontos x_0, onde $f(x)$ é descontínua. Nesses pontos, a soma da série é a média dos limites de $f(x)$ à esquerda e à direita*[2] *de x_0.*

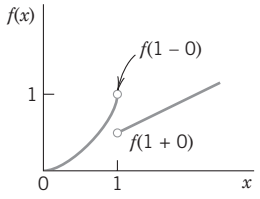


Fig. 258. Limites esquerdo e direito

$f(1-0) = 1$,

$f(1+0) = \frac{1}{2}$

da função $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ x/2 \end{cases}$

[2]O **limite à esquerda** de $f(x)$ em x_0 é definido como o limite de $f(x)$ à medida que x se aproxima de x_0 pela esquerda, sendo comumente representado por $f(x_0 - 0)$. Portanto,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{h \to 0} f(x_0 - h) \text{ quando } h \to 0 \text{ por valores positivos.}$$

O **limite à direita** é representado por $f(x_0 + 0)$ e

$$f(x_0 + 0) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) \text{ quando } h \to 0 \text{ por valores positivos.}$$

As **derivadas à esquerda e à direita** de $f(x)$ em x_0 são definidas como os limites de

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h} \quad \text{e} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

respectivamente, à medida que $h \to 0$ por valores positivos. Naturalmente, se $f(x)$ é contínua em x_0, o último termo em ambos os numeradores é simplesmente $f(x_0)$.

PROVA Provemos a convergência no Teorema 2. Provaremos a convergência para uma função contínua $f(x)$ que possui derivadas primeiras e segundas contínuas. Integrando (6b) por partes, obtemos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{f(x)\,\operatorname{sen} nx}{n\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\operatorname{sen} nx\,dx.$$

O primeiro termo no lado direito vale zero. Uma outra integração por partes fornece

$$a_n = \frac{f'(x)\cos nx}{n^2\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx.$$

O primeiro termo à direita é nulo por causa da periodicidade e continuidade de $f'(x)$. Como f'' é contínua no intervalo de integração, temos

$$|f''(x)| < M$$

para uma constante apropriada M. Além disso, $|\cos nx| \leqq 1$. Segue-se que

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx\right| < \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\,dx = \frac{2M}{n^2}.$$

Similarmente, $|b_n| < 2M/n^2$ para todo n. Logo, o valor absoluto de cada termo da série de Fourier de $f(x)$ é, no máximo, igual ao termo correspondente da série

$$|a_0| + 2M\left(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

que é convergente. Logo, essa série de Fourier converge e a prova fica completa. (Os leitores já familiarizados com a convergência uniforme verão que, pelo teste de Weierstrass na Seção 15.5, sob as suposições aqui presentes, a série de Fourier converge uniformemente, e nossa demonstração de (6) usando a integração termo a termo justifica-se então pelo Teorema 3 da Seção 15.5.)

A prova da convergência no caso de uma função $f(x)$ contínua por intervalos e a prova de que, sob as suposições mencionadas no teorema, a série de Fourier (5) com os coeficientes (6) representa $f(x)$, são substancialmente mais complicadas; veja, por exemplo, a Ref. [C12]. ■

EXEMPLO 2 Convergência em um Salto, como Indicada no Teorema 2

A onda retangular no Exemplo 1 apresenta um salto em $x = 0$. Neste ponto, seu limite à esquerda é $-k$ e seu limite à direita é k (Fig. 257). Logo, a média desses limites é 0. A série de Fourier (8) para a onda de fato converge para este valor quando $x = 0$, porque nesse caso todos os seus termos são nulos. Algo similar ocorre com os outros saltos. Isto está em concordância com o Teorema 2. ■

Resumo. Uma série de Fourier de uma função dada $f(x)$ de período 2π é uma série com a forma (5) e que tem os coeficientes dados pelas fórmulas de Euler (6). O Teorema 2 determina as circunstâncias suficientes para que essa série convirja e tenha o valor $f(x)$ em cada x, exceto nas descontinuidades de $f(x)$, onde a série é igual à média aritmética dos limites de $f(x)$ à direita e à esquerda nesses pontos.

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.1

1. (Revisão de cálculo) Reveja as técnicas de integração para as integrais com maior probabilidade de surgir nas fórmulas de Euler, como, por exemplo, as integrais definidas de $x\cos nx$, $x^2\operatorname{sen} nx$, $e^{-2x}\cos nx$ etc.

2–3 PERÍODO FUNDAMENTAL

Período fundamental é o menor período positivo. Encontre-o para

2. $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 2x$, $\cos \pi x$, $\operatorname{sen} \pi x$, $\cos 2\pi x$, $\operatorname{sen} 2\pi x$

3. $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$, $\cos\dfrac{2\pi x}{k}$, $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi x}{k}$, $\cos\dfrac{2\pi nx}{k}$, $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi nx}{k}$

4. Mostre que $f = const.$ é periódica com qualquer período, mas não possui período fundamental.

5. Se $f(x)$ e $g(x)$ têm o período p, mostre que $h(x) = af(x) + bg(x)$ (a, b, constantes) tem o período p. Portanto, todas as funções de período p constituem um **espaço vetorial**.

6. (Mudança de escala) Se $f(x)$ tem período p, mostre que $f(ax)$, $a \neq 0$, e $f(x/b)$, $b \neq 0$, são funções periódicas de x e têm os períodos p/a e bp, respectivamente. Dê exemplos.

7–12 GRÁFICOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS 2π

Esboce ou faça o gráfico de $f(x)$, que tem período 2π e, para $-\pi < x < \pi$, é dada como segue.

7. $f(x) = x$ **8.** $f(x) = e^{-|x|}$

9. $f(x) = \pi - |x|$ **10.** $f(x) = |\operatorname{sen} 2x|$

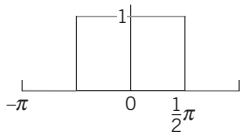
11. $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ x^3 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \cos\frac{1}{2}x & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$

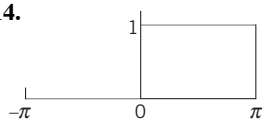
13–24 SÉRIES DE FOURIER

Mostrando os detalhes do que fizer, encontre a série de Fourier da $f(x)$ dada, que se supõe ter o período 2π. Esboce ou represente graficamente as somas parciais até a parte contendo cos $5x$ e sen $5x$.

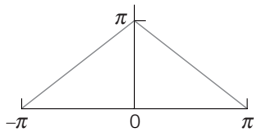
13.



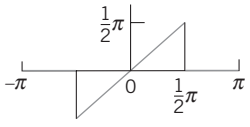
14.



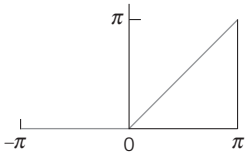
15.



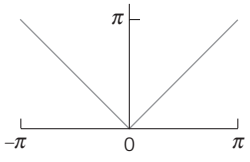
16.



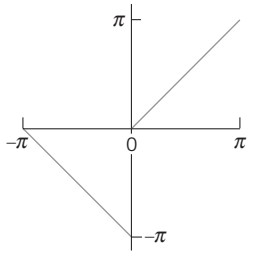
17.



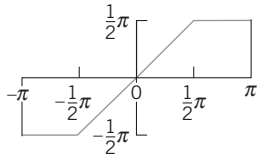
18.



19.



20.



21. $f(x) = x^2 \ (-\pi < x < \pi)$

22. $f(x) = x^2 \ (0 < x < 2\pi)$

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{4}\pi^2 & \text{se } \frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} -4x & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 4x & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$

25. (Descontinuidades) Verifique a última sentença do Teorema 2, referente às descontinuidades de $f(x)$ no Problema 13.

26. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Gráficos. Escreva um programa para representar graficamente as somas parciais das séries a seguir. Com base no gráfico, tente adivinhar qual função $f(x)$ a série em questão pode representar. Então, confirme ou não sua suposição utilizando as fórmulas de Euler.

(a) $2(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots) - 2(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x \cdots)$

(b) $\frac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots)$

(c) $\frac{2}{3}\pi^2 + 4(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{16}\cos 4x + - \cdots)$

27. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Ordem dos Coeficientes de Fourier. A ordem parece ser $1/n$ se f for descontínua; $1/n^2$ se f for contínua, mas $f' = df/dx$ é descontínua; $1/n^3$ se f e f' são contínuas, mas f'' é descontínua etc. Tente verificar isto por meio de exemplos e tente prová-lo integrando por partes as fórmulas de Euler. Qual é o significado prático disto?

28. PROJETO. Fórmulas de Euler em Termos de Saltos sem Integração. Mostre que, para uma função cuja derivada terceira é identificada nula,

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left[-\sum j_s \operatorname{sen} nx_s - \frac{1}{n}\sum j_s' \cos nx_s + \frac{1}{n^2}\sum j_s'' \operatorname{sen} nx_s\right]$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[\sum j_s \cos nx_s - \frac{1}{n}\sum j_s' \operatorname{sen} nx_s - \frac{1}{n^2}\sum j_s'' \cos nx_s\right]$$

onde $n = 1, 2, \ldots$ e a soma é feita sobre todos os saltos j_s, j'_s, j''_s de f, f', f', respectivamente, situados em x_s.

29. Aplique as fórmulas do Projeto 28 à função do Problema 21 e compare os resultados.

30. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Ortogonalidade. Integre e represente graficamente a integral do produto cos mx cos nx (com vários inteiros m e n de sua escolha) de $-a$ até a como uma função de a, e confirme a ortogonalidade de cos mx e cos nx ($m \neq n$) para $a = \pi$ a partir do gráfico. Para quais m e n obteríamos a ortogonalidade para $a = \pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$? Um outro a? Estenda esse experimento para cos mx sen nx e sen mx sen nx.

11.2 Funções de um Período Qualquer $p = 2L$

As funções que consideramos até agora tinham um período de 2π, para que as fórmulas ficassem mais simples. Naturalmente, as funções periódicas nas aplicações terão em geral outros períodos. Entretanto, mostraremos agora que a transição do período $p = 2\pi$ para um período $2L$ é algo bastante simples de se fazer. A notação $p = 2L$ é prática porque L terá o comprimento de uma corda de violino (Seção 12.2) ou o comprimento de uma haste na condução do calor (Seção 12.5), e assim por diante.

A idéia é simplesmente encontrar e usar uma ***mudança de escala*** que forneça, a partir de uma função $g(v)$ de período 2π, uma função de período $2L$. Ora, de (5) e (6) na última seção, com $g(v)$ ao invés de $f(x)$, temos a série de Fourier

$$(1) \qquad g(v) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \operatorname{sen} nv)$$

com os coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\,dv$$

(2)
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\cos nv\,dv$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\,\text{sen}\,nv\,dv.$$

Podemos agora escrever a mudança de escala como $v = kx$ com k tal que o período anterior $v = 2\pi$ fornece para a nova variável x o novo período $x = 2L$. Portanto, $2\pi = k2L$. Logo, $k = \pi/L$ e

(3)
$$v = kx = \pi x/L.$$

Isto implica que $dv = (\pi/L)\,dx$, o que, ao se fazer a substituição em (2), cancela $1/2\pi$ e $1/\pi$, dando, no lugar disso, os fatores $1/2L$ e $1/L$. Escrevendo

(4)
$$g(v) = f(x),$$

obtemos assim de (1) a **série de Fourier** da função $f(x)$ de período $2L$

(5)
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}\,x + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{L}\,x\right)$$

com os **coeficientes de Fourier** de $f(x)$ dados pelas **fórmulas de Euler**

(6)

(a)
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

(b)
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

(c)
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Como na Seção 11.1, continuamos a dizer que (5) com coeficientes quaisquer é uma **série trigonométrica**. E podemos integrar de 0 a $2L$, ou sobre qualquer outro intervalo de comprimento $p = 2L$.

EXEMPLO 1 **Onda Retangular Periódica**

Encontre a série de Fourier da função (Fig. 259)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 < x < -1 \\ k & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases} \qquad p = 2L = 4, \quad L = 2.$$

Solução. De (6a), obtemos $a_0 = k/2$ (verifique!). De (6b), obtemos

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2k}{n\pi}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}.$$

Portanto, $a_n = 0$ se n for par e

$$a_n = 2k/n\pi \quad \text{se} \quad n = 1, 5, 9, \cdots, \qquad a_n = -2k/n\pi \quad \text{se} \quad n = 3, 7, 11, \cdots.$$

De (6c), constatamos que $b_n = 0$ para $n = 1, 2, \cdots$ Logo, a série de Fourier é

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - + \cdots\right).$$

■

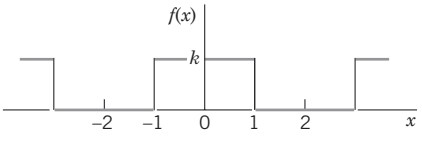


Fig. 259. Exemplo 1

EXEMPLO 2 Onda Retangular Periódica

Encontre a série de Fourier da função (Fig. 260)

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{se } -2 < x < 0 \\ k & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases} \qquad p = 2L = 4, \qquad L = 2.$$

Solução. $a_0 = 0$ de (6a). De (6b), com $1/L = 1/2$,

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} (-k)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right] = 0,$$

de modo que a série de Fourier não possui nenhum termo em cossenos. De (6c),

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} - \frac{2k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right]$$

$$= \frac{k}{n\pi}(1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1) = \begin{cases} 4k/n\pi & \text{se } n = 1, 3, \cdots \\ 0 & \text{se } n = 2, 4, \cdots. \end{cases}$$

Logo, a série de Fourier de $f(x)$ é

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}x + \cdots\right).$$

É interessante o fato de que poderíamos chegar a esta fórmula a partir de (8) da Seção 11.1, a saber, pela mudança de escala (3). Realmente, escrevendo v no lugar de x, temos em (8) da Seção 11.1,

$$\frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} v + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3v + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5v + \cdots\right).$$

Como o período 2π em v corresponde a $2L = 4$, temos que $k = \pi/L = \pi/2$ e $v = kx = \pi x/2$ em (3); logo, obtemos a série de Fourier de $f(x)$, como antes. ■

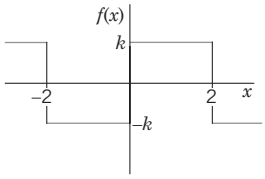


Fig. 260. Exemplo 2

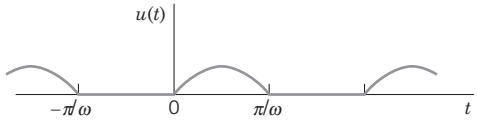


Fig. 261. Retificador de meia-onda

EXEMPLO 3 Meia-onda Retificadora

Uma tensão senoidal $E\operatorname{sen}\omega t$, onde t é o tempo, atravessa um retificador de meia-onda que absorve a porção negativa da onda (Fig. 261). Encontre a série de Fourier da função periódica resultante

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -L < t < 0, \\ E\operatorname{sen}\omega t & \text{se } 0 < t < L \end{cases} \qquad p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad L = \frac{\pi}{\omega}.$$

Solução. Como $u = 0$ quando $-L < t < 0$, obtemos de (6a), com t no lugar de x,

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\operatorname{sen}\omega t\,dt = \frac{E}{\pi}$$

e, de (6b), usando a fórmula (11) do Apêndice A3.1 com $x = \omega t$ e $y = n\omega t$,

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\operatorname{sen}\omega t\cos n\omega t\,dt = \frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}[\operatorname{sen}(1+n)\omega t + \operatorname{sen}(1-n)\omega t]\,dt.$$

Se $n = 1$, a integral à direita é zero, e se $n = 2, 3, \cdots$, prontamente obtemos

$$a_n = \frac{\omega E}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n}\right).$$

Se n é ímpar, essa expressão é igual a zero e, para n par, temos

$$a_n = \frac{E}{2\pi}\left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n}\right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \qquad (n = 2, 4, \cdots).$$

De modo similar, encontramos de (6c) que $b_1 = E/2$ e $b_n = 0$ para $n = 2, 3, \cdots$ Conseqüentemente,

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \cdots\right).$$

■

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.2

1–11 SÉRIES DE FOURIER DE PERÍODO $p = 2L$

Encontre a série de Fourier da função $f(x)$, de período $p = 2L$, e faça um gráfico ou esboço das três primeiras somas parciais. (Mostre os detalhes do que fizer.)

1. $f(x) = -1\ (-2 < x < 0)$, $f(x) = 1\ (0 < x < 2)$, $p = 4$

2. $f(x) = 0\ (-2 < x < 0)$, $f(x) = 4\ (0 < x < 2)$, $p = 4$

3. $f(x) = x^2 \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2$

4. $f(x) = \pi x^3/2 \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2$

5. $f(x) = \operatorname{sen}\pi x \quad (0 < x < 1), \quad p = 1$

6. $f(x) = \cos \pi x \quad (-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}), \quad p = 1$

7. $f(x) = |x| \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2$

8. $f(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ se } -1 < x < 0 \\ 1 - x \text{ se } \ 0 < x < 1, \end{cases} \quad p = 2$

9. $f(x) = 1 - x^2 \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2$

10. $f(x) = 0\ (-2 < x < 0)$, $f(x) = x\ (0 < x < 2)$, $p = 4$

11. $f(x) = -x \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = x \quad (0 < x < 1)$, $f(x) = 1 \quad (1 < x < 3), \quad p = 4$

12. (Retificador) Encontre a série de Fourier da função obtida quando passamos a tensão $v(t) = V_0 \cos 100\pi t$ através de um retificador de meia-onda.

13. Mostre que as conhecidas identidades

$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$ e $\operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x$ podem ser interpretadas como expansões em séries de Fourier. Desenvolva $\cos^4 x$.

14. Obtenha a série do Problema 7 a partir da série do Problema 8.

15. Obtenha a série do Problema 6 a partir da série do Problema 5.

16. Obtenha a série do Problema 3 a partir da série do Problema 21 (em Problemas Propostos 11.1).

17. Usando o Problema 3, mostre que

$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - \cdots = \frac{1}{12}\pi^2$.

18. Mostre que $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - \cdots = \frac{1}{12}\pi^2$.

19. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Séries de Fourier de Funções de Período $2L$. (a) Escreva um programa para obter as somas parciais de uma série de Fourier (1).

(b) Aplique o programa aos Problemas. 2–5, representando num mesmo gráfico as primeiras somas parciais de cada uma das quatro séries. Escolha as primeiras cinco ou mais somas parciais, até elas se aproximarem razoavelmente bem da função dada. Compare e comente.

20. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Fenômeno de Gibbs. As somas parciais $s_n(x)$ de uma série de Fourier apresentam oscilações perto de um ponto de descontinuidade. Essas oscilações não desaparecem com o aumento de n, mas, ao invés disso, aproximam-se cada vez mais de "picos" agudos. Isso foi matematicamente explicado por J. W. Gibbs[3]. Faça o gráfico de $s_n(x)$ no Problema 10. Quando n valer, digamos, 50, você verá de modo bastante distinto essas oscilações. Considere similarmente outras séries de Fourier de sua escolha. Faça comparações.

11.3 Funções Pares e Ímpares. Expansões de Meia-escala

No Exemplo 1 da Seção 11.2, a função é *par*, e sua série de Fourier tem somente termos em *cossenos*. Já no Exemplo 2 da Seção 11.2, a função é *ímpar*, e sua série de Fourier tem somente termos em *senos*.

Lembre que g é **par** *se* $g(-x) = g(x)$, de modo que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo vertical (Fig. 262). Já uma função h é **ímpar** se $h(-x) = -h(x)$ (Fig. 263).

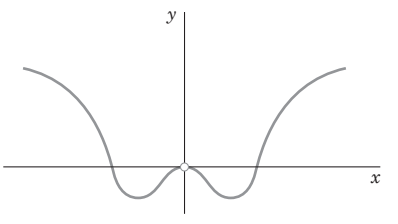


Fig. 262. Função par

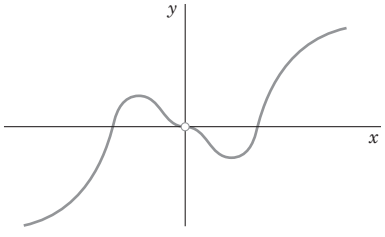


Fig. 263. Função ímpar

[3] JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903), matemático norte-americano, assumiu a cátedra de física matemática em Yale em 1871 e foi um dos fundadores do cálculo vetorial [o outro foi O. Heaviside (veja a Seção 6.1)], da termodinâmica matemática e da mecânica estatística. Seus trabalhos foram de grande importância para o desenvolvimento da física matemática.

Ora, na série de Fourier (5) da Seção 11.2, os termos em cossenos são pares e os termos em senos são ímpares. Assim, não deve constituir uma surpresa o fato de que uma função par seja representada por uma série de termos em cossenos, e uma função ímpar, por uma série de termos em senos, conforme mostram as Figs. 262 e 263 e o Teorema 1.

TEOREMA 1

Séries de Fourier de Cossenos, Séries de Fourier de Senos

A série de Fourier de uma função ***par*** *de período* $2L$ *é uma* **"série de Fourier de cossenos"**

(1) $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \qquad (f \text{ par})$$

com os coeficientes (observe: a integração é feita somente de 0 a L!)

(2) $$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

A série de Fourier de uma função ***ímpar*** *de período* $2L$ *é uma* **"série de Fourier de senos"**

(3) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \qquad (f \text{ ímpar})$$

com os coeficientes

(4) $$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

PROVA Como a integral definida de uma função fornece a área entre os limites da integração sob a curva da função, temos que

$$\int_{-L}^{L} g(x)\, dx = 2 \int_0^L g(x)\, dx \qquad \text{para } g \text{ par}$$

$$\int_{-L}^{L} h(x)\, dx = 0 \qquad \text{para } h \text{ ímpar}$$

conforme fica óbvio pelos gráficos de g e h. (Prove isso formalmente.) Consideremos agora que f seja par. Então, (6a) da Seção 11.2 fornece a_0 em (2). Além disso, o integrando em (6b) da Seção 11.2 é par (um produto de funções pares é par), de modo que (6b) fornece a_n em (2). Além disso, o integrando em (6c) da Seção 11.2 é a função par f multiplicada pelo seno ímpar, de modo que o integrando (o produto) é ímpar, a integral é zero e não há em (1) qualquer termo dado em seno.

Similarmente, se f é ímpar, em (6a) e (6b) da Seção 11.2, as integrais para a_0 e a_n são nulas, f vezes o seno em (6c) é par, (6c) implica (4) e não há em (3) qualquer termo em cossenos. ■

O Caso do Período 2π. Se $L = \pi$, então $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (f par) com os coeficientes

(2*) $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

e $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$ (f ímpar) com os coeficientes

(4*) $$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Uma ilustração disso está no Exemplo 1 da Seção 11.1, onde $f(x)$ é ímpar e é representada por uma série de Fourier em senos.

Outras simplificações resultam da seguinte propriedade, cuja prova, bastante simples, é deixada para o estudante.

TEOREMA 2 **Soma e Múltiplo Escalar**

Os coeficientes de Fourier de uma soma $f_1 + f_2$ são as somas dos correspondentes coeficientes de Fourier de f_1 e f_2.

Os coeficientes de Fourier de cf são o produto de c pelos correspondentes coeficientes de Fourier de f.

EXEMPLO 1 **Pulso Retangular**

A função $f^*(x)$ na Fig. 264 é a soma da função $f(x)$ no Exemplo 1 da Seção 11.1 com a constante k. Portanto, desse exemplo e do Teorema 2, concluímos que

$$f^*(x) = k + \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right).$$

EXEMPLO 2 **Retificador de Meia-onda**

No Exemplo 3 da Seção 11.2, a função $v(t)$ tem uma série de Fourier de cossenos mais um único termo $v(t) = (E/2)\operatorname{sen}\omega t$. Concluímos disso e do Teorema 2 que $u(t) - v(t)$ deve ser uma função par. Verifique isto graficamente. (Veja a Fig. 265.)

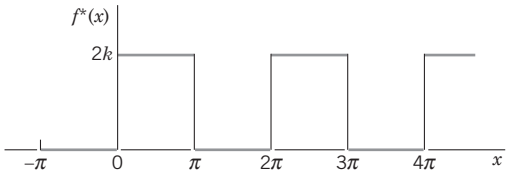


Fig. 264. Exemplo 1

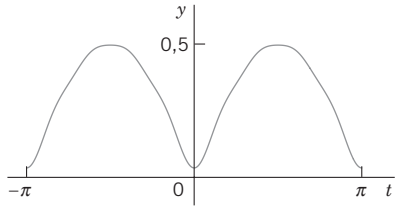
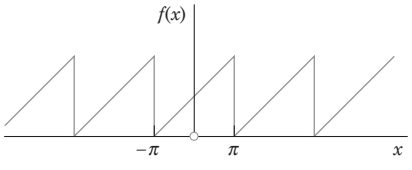


Fig. 265. $u(t) - v(t)$ com $E = 1$, $\omega = 1$.

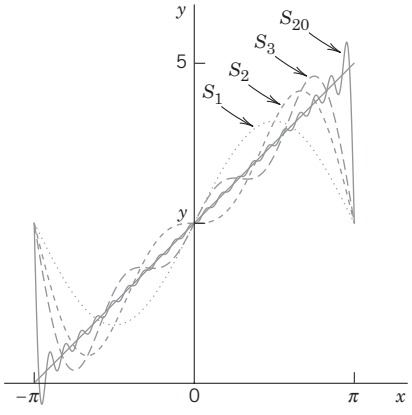
EXEMPLO 3 **Onda Dente-de-serra**

Encontre a série de Fourier da função (Fig. 266)

$$f(x) = x + \pi \quad \text{se} \quad -\pi < x < \pi \qquad \text{e} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$



(*a*) A função $f(x)$



(*b*) Somas parciais S_1, S_2, S_3, S_{20}

Fig. 266. Exemplo 3

Solução. Temos que $f = f_1 + f_2$, onde $f_1 = x$ e $f_2 = \pi$. Os coeficientes de Fourier de f_2 são nulos, à exceção do primeiro (o termo constante), que é igual a π. Logo, pelo Teorema 2, os coeficientes de Fourier a_n, b_n são os de f_1, à exceção de a_0, que é igual a π. Como f_1 é ímpar, $a_n = 0$ para $n = 1, 2, \cdots$, e

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\,\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\operatorname{sen} nx\,dx.$$

Integrando por partes, obtemos

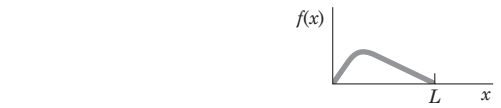
$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi.$$

Logo $b_1 = 2$, $b_2 = -2/2$, $b_3 = 2/3$, $b_4 = -2/4$, $\cdots$, e a série de Fourier de $f(x)$ é

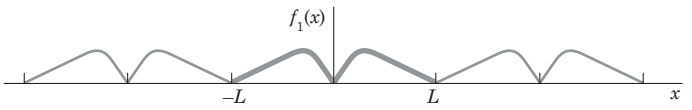
$$f(x) = \pi + 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - + \cdots\right). \qquad \blacksquare$$

Expansões de Meia-escala

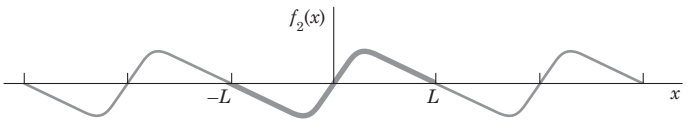
As expansões de meia-escala são séries de Fourier. A idéia é simples e útil, e é explicada pela Fig. 267. Desejamos representar $f(x)$ na Fig. 267a por uma série de Fourier, onde, por exemplo, $f(x)$ pode ter a forma de uma corda distorcida de um violino ou representar a temperatura numa barra metálica de comprimento L. (Os problemas correspondentes serão discutidos no Capítulo 12.) Vem-nos então a seguinte idéia.



(a) A função dada $f(x)$



(b) $f(x)$ estendida como uma função periódica ***par*** de período $2L$



(c) $f(x)$ estendida como uma função periódica ***ímpar*** de período $2L$

Fig. 267. (a) Função $f(x)$ dada sobre um intervalo $0 \leqq x \leqq L$
(b) **Extensão par** da "escala" (intervalo) cheia $-L \leqq x \leqq L$ (curva grossa) e a extensão periódica de período $2L$ sobre o eixo x
(c) **Extensão ímpar** sobre $-L \leqq x \leqq L$ (curva grossa) e extensão periódica de período $2L$ sobre o eixo x

Poderíamos estender $f(x)$ como uma função de período L e expandir a função estendida numa série de Fourier. Porém, em geral tal série conteria *tanto* termos em cossenos *como* em senos. Podemos então melhorar isso e obter uma série mais simples. Com efeito, para nossa função f dada, podemos calcular os coeficientes de Fourier a partir de (2) ou de (4) do Teorema 1, optando pelo caminho que nos parecer mais prático. Se usarmos (2), obteremos (1). Esta é a **extensão periódica par** f_1 de f na Fig. 267b. Se, em vez disso, escolhermos (4), obteremos (3), a **extensão periódica ímpar** f_2 de f na Fig. 267c.

Ambas as extensões têm o período $2L$, e a isso se deve o nome **expansões de meia-escala**: f é dada (e tem interesse físico) somente na metade da escala, ou seja, na metade do intervalo de periodicidade de comprimento $2L$.

Ilustremos essas idéias com um exemplo de que também precisaremos no Capítulo 12.

EXEMPLO 4 O "Triângulo" e Suas Expansões de Meia-escala

Encontre as duas expansões de meia-escala da função (Fig. 268)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \text{se } 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2k}{L}(L - x) & \text{se } \dfrac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

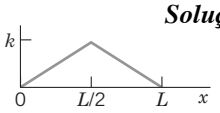


Fig. 268. A função dada no Exemplo 4

Solução. **(*a*) *Extensão periódica par.*** De (2), obtemos

$$a_0 = \frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\,dx\right] = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right]$$

Consideremos a_n. Para a primeira integral, a integração por partes fornece-nos

$$\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{Lx}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{L^2}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right).$$

Similarmente, para a segunda integral, obtemos

$$\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{L}{n\pi}(L-x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\Big|_{L/2}^{L} + \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \left(0 - \frac{L}{n\pi}\left(L - \frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Insiramos esses dois resultados na fórmula de a_n. Os termos em seno se cancelam e o mesmo ocorre com um fator L^2. Isso dá

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right).$$

Portanto,

$$a_2 = -16k/(2^2\pi^2), \qquad a_6 = -16k/(6^2\pi^2), \qquad a_{10} = -16k/(10^2\pi^2), \cdots$$

e $a_n = 0$ se $n \neq 2, 6, 10, 14, \cdots$ Logo, a primeira expansão de meia-escala de $f(x)$ é (Fig. 269a)

$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{L}x + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L}x + \cdots\right).$$

Essa série de Fourier em cossenos representa a extensão periódica par da função $f(x)$ dada, de período $2L$.

(b) *Extensão periódica ímpar.* Similarmente, de (4) obtemos

$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}. \tag{5}$$

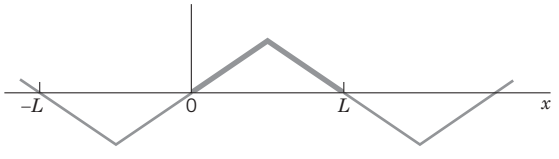
Logo, a outra expansão de meia-escala de $f(x)$ é (Fig. 269b)

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{L}x - + \cdots\right).$$

Esta série representa a extensão periódica ímpar de $f(x)$, de período $2L$.

Aplicações básicas destes resultados serão mostradas nas Seções 12.3 e 12.5. ■

(a) Extensão par



(b) Extensão ímpar

Fig. 269. Extensões periódicas de $f(x)$ no Exemplo 4

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.3

1–9 FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

As seguintes funções são pares, ímpares, ou nem pares nem ímpares?

1. $|x|$, x^2 sen nx, $x + x^2$, $e^{-|x|}$, ln x, x cosh x

2. sen (x^2), sen^2 x, x senh x, $|x^3|$, $e^{\pi x}$, xe^x, tang $2x$, $x/(1 + x^2)$

As funções a seguir, que se supõem ser periódicas e de período 2π, são pares, ímpares, ou nem pares nem ímpares?

3. $f(x) = x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$

4. $f(x) = x^2 \quad (-\pi/2 < x < 3\pi/2)$

5. $f(x) = e^{-4x} \quad (-\pi < x < \pi)$

6. $f(x) = x^3 \operatorname{sen} x \quad (-\pi < x < \pi)$

7. $f(x) = x|x| - x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$

8. $f(x) = 1 - x + x^3 - x^5 \quad (-\pi < x < \pi)$

9. $f(x) = 1/(1 + x^2)$ se $-\pi < x < 0$, $f(x) = -1/(1 + x^2)$ se $0 < x < \pi$

10. PROJETO. Funções Pares e Ímpares. (a) As expressões a seguir são pares ou ímpares? Somas e produtos de funções pares e de funções ímpares. Produtos de funções pares por funções ímpares. Valores absolutos de funções ímpares. $f(x) + f(-x)$ e $f(x) - f(-x)$ para $f(x)$ arbitrária.

(b) Escreva e^{kx}, $1/(1 - x)$, sen $(x + k)$, cosh $(x + k)$ na forma de somas de uma função par com uma função ímpar.

(c) Encontre todas as funções que são simultaneamente pares e ímpares.

(d) A função cos^3 x é par ou ímpar? E sen^3 x? Encontre a série de Fourier dessas funções. Você reconhece identidades familiares?

11–16 SÉRIES DE FOURIER DE FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

A função dada é par ou ímpar? Encontre sua série de Fourier. Faça um esboço ou gráfico da função e de algumas somas parciais. (Mostre os detalhes do que fizer.)

11. $f(x) = \pi - |x| \quad (-\pi < x < \pi)$

12. $f(x) = 2x|x| \quad (-1 < x < 1)$

13. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} \pi e^{-x} & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \pi e^{x} & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 < x < 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|x| & \text{se } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{se } 2 < x < 6 \end{cases} \quad (p = 8)$

17–25 EXPANSÕES DE MEIA-ESCALA

Encontre (a) a série de Fourier de cossenos, (b) a série de Fourier de senos. Faça um esboço de $f(x)$ e de suas duas extensões periódicas. (Mostre os detalhes do que fizer.)

17. $f(x) = 1 \quad (0 < x < 2)$

18. $f(x) = x \quad (0 < x < \frac{1}{2})$

19. $f(x) = 2 - x \quad (0 < x < 2)$

20. $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 2) \\ 1 & (2 < x < 4) \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 2 & (1 < x < 2) \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} x & (0 < x < \pi/2) \\ \pi/2 & (\pi/2 < x < \pi) \end{cases}$

23. $f(x) = x \quad (0 < x < L)$

24. $f(x) = x^2 \quad (0 < x < L)$

25. $f(x) = \pi - x \quad (0 < x < \pi)$

26. Ilustre as fórmulas na prova do Teorema 1 com exemplos. Prove as fórmulas.

11.4 Séries de Fourier Complexas. *Opcional*

Nesta seção opcional, mostraremos que a série de Fourier

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

pode ser escrita na forma complexa, o que às vezes simplifica os cálculos (veja o Exemplo 1 a seguir). Essa forma complexa pode ser obtida porque, no caso complexo, a função exponencial e^{it} relaciona-se a cos t e sen t pela **fórmula** básica **de Euler** (veja (11) na Seção 2.2)

$$(2) \qquad e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t. \qquad \text{Portanto,} \qquad e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t.$$

Inversamente, adicionando e subtraindo essas duas fórmulas, obtemos

$$(3) \qquad \text{(a)} \quad \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \qquad \text{(b)} \quad \operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

De (3), usando $1/i = -i$ em sen t e fazendo $t = nx$ em ambas as fórmulas, obtemos

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2} a_n(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i} b_n(e^{inx} - e^{-inx})$$
$$= \frac{1}{2} (a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n)e^{-inx}.$$

Insiramos esta expressão em (1). Escrevendo $a_0 = c_0$, $\frac{1}{2}(a_n - ib_n) = c_n$ e $\frac{1}{2}(a_n + ib_n) = k_n$, obtemos de (1)

$$\textbf{(4)} \qquad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}).$$

Os coeficientes $c_1, c_2, \cdots$, e $k_1, k_2, \cdots$ são obtidos de (6b) e (6c) na Seção 11.1 e então (2) acima com $t = nx$,

$$\textbf{(5)} \qquad \begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \operatorname{sen} nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \\ k_n &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \operatorname{sen} nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos combinar (5) numa única fórmula usando o truque de escrever $k_n = c_{-n}$. Então, (4), (5) e $c_0 = a_0$ em (6a) da Seção 11.1 fornecem (com a soma começando de $-\infty$!)

$$\textbf{(6)} \qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \end{aligned} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Esta é a chamada *forma complexa da série de Fourier* ou, mais sucintamente, **série complexa de Fourier** de $f(x)$. Os c_n são chamados de **coeficientes complexos de Fourier** de $f(x)$.

Para uma função de período $2L$, esse raciocínio nos leva à **série complexa de Fourier**

$$\textbf{(7)} \qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \\ c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx, \end{aligned} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

EXEMPLO 1 Série Complexa de Fourier

Encontre a série de Fourier de $f(x) = e^x$ se $-\pi < x < \pi$ e $f(x + 2\pi) = f(x)$, e obtenha a partir dela a série de Fourier usual.

Solução. Como sen $n\pi = 0$ para n inteiro, temos

$$e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm i \operatorname{sen} n\pi = \cos n\pi = (-1)^n.$$

Com isto, obtemos de (6), por integração,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1 - in}\,e^{x - inx}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1 - in}\,(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n.$$

No lado direito,

$$\frac{1}{1 - in} = \frac{1 + in}{(1 - in)(1 + in)} = \frac{1 + in}{1 + n^2} \qquad \text{e} \qquad e^{\pi} - e^{-\pi} = 2 \operatorname{senh} \pi.$$

Logo, a série complexa de Fourier é

$$(8) \qquad e^x = \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + in}{1 + n^2}\, e^{inx} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Obtenhamos disto a série real de Fourier. Usando (2) com $t = nx$ e $i^2 = -1$, temos em (8)

$$(1 + in)e^{inx} = (1 + in)(\cos nx + i \operatorname{sen} nx) = (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) + i(n \cos nx + \operatorname{sen} nx).$$

Ora, (8) também possui um termo correspondente com $-n$ em vez de n. Como cos $(-nx)$ = cos nx e sen $(-nx)$ = –sen nx, obtemos neste termo

$$(1 - in)e^{-inx} = (1 - in)(\cos nx - i \operatorname{sen} nx) = (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) - i(n \cos nx + \operatorname{sen} nx).$$

Se somarmos essas duas expressões, as partes imaginárias se cancelam. Portanto, sua soma é

$$2(\cos nx - n \operatorname{sen} nx), \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Para $n = 0$, obtemos 1 (e não 2) porque há somente um termo. Logo, a série real de Fourier é

$$(9) \qquad e^x = \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + 1^2}(\cos x - \operatorname{sen} x) + \frac{1}{1 + 2^2}(\cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x) - + \cdots\right].$$

Na Fig. 270, a aproximação ruim que ocorre próximo dos saltos em $\pm\pi$ é um caso do fenômeno de Gibbs (veja o experimento de álgebra computacional em Problemas Propostos 11.2). ■

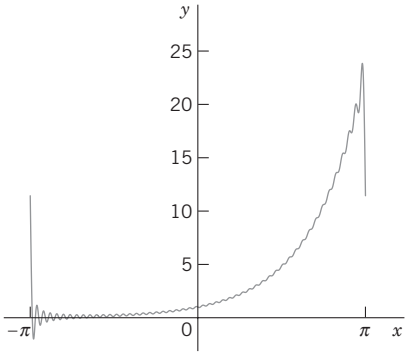


Fig. 270. Soma parcial de (9), termos de $n = 0$ a 50

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.4

1. **(Revisão de cálculo)** Faça uma revisão de números complexos.
2. **(Funções pares e ímpares)** Mostre que os coeficientes complexos de Fourier de uma função par são reais e que os de uma função ímpar são imaginários puros.
3. **(Coeficientes de Fourier)** Mostre que $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$.
4. Verifique os cálculos no Exemplo 1.
5. Encontre mais alguns termos em (9) e, usando o computador, represente graficamente as somas parciais.
6. No Exemplo 1, obtenha a série real diretamente a partir das fórmulas de Euler na Seção 11.

7–13 SÉRIE COMPLEXA DE FOURIER

Encontre a série complexa de Fourier das seguintes funções. (Mostre os detalhes do que fizer.)

7. $f(x) = -1$ se $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ se $0 < x < \pi$
8. Converta a série do Problema 7 para a forma real.
9. $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$
10. Converta a série do Problema 9 para a forma real.
11. $f(x) = x^2$ $(-\pi < x < \pi)$
12. Converta a série do Problema 11 para a forma real.
13. $f(x) = x$ $(0 < x < 2\pi)$
14. **PROJETO. Coeficientes Complexos de Fourier.** É muito interessante o fato de c_n em (6) poder ser obtido diretamente por um método similar ao utilizado para a_n e b_n na Seção 11.1. Para isto, multiplique a série em (6) por e^{-imx} com um m inteiro fixo e integre termo a termo de $-\pi$ a π em ambos os lados (o que é permitido, por exemplo, no caso da convergência uniforme), a fim de obter

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx.$$

Mostre que a integral no lado direito é igual a 2π quando $n = m$ e 0 quando $n \neq m$ [use (3b)], de modo a obter a fórmula do coeficiente em (6).

11.5 Oscilações Forçadas

As séries de Fourier têm importantes aplicações em conexão com as EDOs e EDPs. Mostraremos isto para um problema fundamental modelado por uma EDO. Várias aplicações em EDPs serão mostradas no Capítulo 12. Isto evidenciará a enorme utilidade da engenhosa idéia de Euler e de Fourier de decompor as funções periódicas em funções as mais simples possíveis.

Da Seção 2.8, sabemos que as oscilações forçadas de um corpo de massa m em uma mola de módulo k são governadas pela EDO

(1) $$my'' + cy' + ky = r(t)$$

onde $y = y(t)$ é o deslocamento em relação à posição de repouso, c é a constante de amortecimento, k é a constante da mola (constante elástica) e $r(t)$ é a força externa dependente do tempo t. A Fig. 271 mostra o modelo, e a Fig. 272, a sua analogia para o caso elétrico, num circuito RLC governado por

(1*) $$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$ (Sec. 2.9).

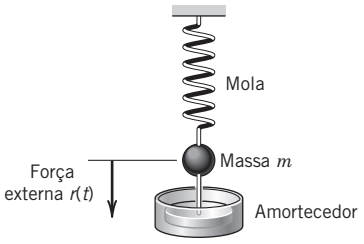


Fig. 271. Sistema vibratório considerado

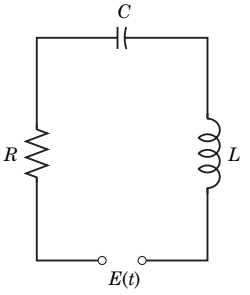


Fig. 272. Analogia elétrica do sistema da Fig. 271 (circuito *RLC*)

Consideremos (1). Se $r(t)$ for uma função seno ou cosseno e se houver amortecimento ($c > 0$), então a solução de regime permanente é uma oscilação harmônica com a freqüência igual à de $r(t)$. Entretanto, se $r(t)$ não for uma função pura de senos ou cossenos, mas qualquer outra função periódica, então a solução de regime permanente será uma superposição de oscilações harmônicas com as freqüências iguais à de $r(t)$ e de múltiplos inteiros desta última. E se uma dessas freqüências estiver próxima da freqüência de ressonância (prática) do sistema vibratório (veja a Seção 2.8), então a oscilação correspondente pode ser a parte dominante da resposta do sistema à força externa. Isto é o que o uso da série de Fourier nos mostrará. Naturalmente, trata-se de algo bastante surpreendente a um observador não familiarizado com as séries de Fourier, as quais têm uma enorme importância no estudo de sistemas vibratórios e de ressonância. Discutamos agora toda essa situação por meio de um exemplo típico.

EXEMPLO 1 Oscilações Forçadas sob uma Força Impulsora Periódica e Não-senoidal

Em (1), façamos $m = 1$ (g), $c = 0{,}05$ (g/s) e $k = 25$ (g/s^2), de modo que (1) torna-se

$$y'' + 0{,}05y' + 25y = r(t) \tag{2}$$

onde $r(t)$ é medida em g·cm/s^2. Fazendo (Fig. 273)

$$r(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad -\pi < t < 0, \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad 0 < t < \pi, \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t).$$

Encontre a solução $y(t)$ de regime permanente.

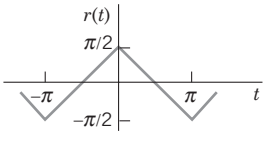


Fig. 273. Força do Exemplo 1

Solução. Representemos $r(t)$ por uma série de Fourier, encontrando

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right) \tag{3}$$

(considerando a resposta do Problema 11 em Problemas Propostos 11.3 menos $\frac{1}{2}\pi$ e escrevendo t no lugar de x). Então, tomemos a EDO

$$y'' + 0{,}05y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \qquad (n = 1, 3, \cdots) \tag{4}$$

cujo lado direito é um termo único da série (3). Da Seção 2.8, sabemos que a solução de regime permanente $y_n(t)$ de (4) tem a forma

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt. \tag{5}$$

Substituindo isto em (4), vemos que

$$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2\pi D_n}, \qquad B_n = \frac{0{,}2}{n\pi D_n}, \qquad \text{onde} \qquad D_n = (25 - n^2)^2 + (0{,}05n)^2. \tag{6}$$

Como a EDO (2) é linear, podemos esperar que a solução de estado permanente seja

$$y = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots \tag{7}$$

onde y_n é dada por (5) e (6). De fato, isso decorre prontamente da substituição de (7) em (2) e do uso da série de Fourier de $r(t)$, contanto que seja possível fazer a derivação termo a termo de (7). (Os leitores já familiarizados com a noção de convergência uniforme [Seção 15.5] podem provar que é possível derivar (7) termo a termo.)

De (6), vemos que a amplitude de (5) é (um fator $\sqrt{D_n}$ se cancela)

$$C_n = \sqrt{{A_n}^2 + {B_n}^2} = \frac{4}{n^2\pi\sqrt{D_n}}.$$

Os valores numéricos são

$$C_1 = 0{,}0531$$

$$C_3 = 0{,}0088$$

$$C_5 = 0{,}2037$$

$$C_7 = 0{,}0011$$

$$C_9 = 0{,}0003.$$

A Fig. 274 mostra a entrada (multiplicada por 0,1) e a saída. Para $n = 5$, a quantidade D_n é muito pequena, o denominador de C_5 é pequeno e C_5 é tão grande que y_5 é o termo dominante em (7). Logo, a saída é quase uma oscilação harmônica com cinco vezes a freqüência da força impulsora, um pouco distorcida devido ao termo y_1, cuja amplitude corresponde a cerca de 25% da amplitude de y_5. Pode-se fazer essa situação ficar ainda mais extrema diminuindo-se a constante c. Tente fazê-lo. ■

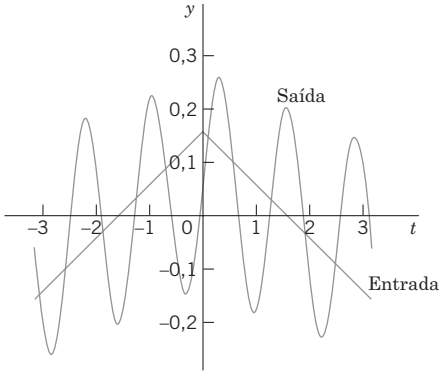


Fig. 274. Entrada e saída de regime permanente do Exemplo 1

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.5

1. (Coeficientes) Obtenha a fórmula para C_n a partir de A_n e B_n.

2. (Constante da mola) O que aconteceria às amplitudes C_n no Exemplo 1 (e, portanto, à forma da vibração) se mudássemos o valor da constante da mola para 9? E se usássemos uma mola mais dura, com $k = 81$? Responda primeiro por palpite.

3. (Amortecimento) No Exemplo 1, substitua c por 0,02 e discuta como isso altera a saída.

4. (Entrada) O que aconteceria no Exemplo 1 se substituíssemos $r(t)$ por sua derivada (a onda retangular)? Qual é a razão entre esse novo valor de C_n e os anteriores?

5–11 SOLUÇÃO GERAL

Encontre uma solução geral da EDO $y'' + \omega^2 y = r(t)$ com $r(t)$ conforme dada. (Mostre os detalhes do que fizer.)

5. $r(t) = \cos \omega t$, $\omega = 0{,}5;\ 0{,}8;\ 1{,}1;\ 1{,}5;\ 5{,}0;\ 10{,}0$

6. $r(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t \quad (\omega^2 \neq {\omega_1}^2, {\omega_2}^2)$

7. $r(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt, \quad |\omega| \neq 1, 2, \cdots, N$

8. $r(t) = \operatorname{sen} t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5t + \frac{1}{7} \operatorname{sen} 7t$

9. $r(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{se} \quad -\pi < t < 0 \\ -t + \pi & \text{se} \quad 0 < t < \pi \end{cases}$

e $r(t + 2\pi) = r(t)$, $|\omega| \neq 0, 1, 3, \cdots$

10. $r(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{se} \quad \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases}$

e $r(t + 2\pi) = r(t)$, $|\omega| \neq 1, 3, 5, \cdots$

11. $r(t) = \frac{\pi}{4} |\operatorname{sen} t|$ if $-\pi < t < \pi$ e $r(t + 2\pi) = r(t)$, $|\omega| \neq 0, 2, 4, \cdots$

12. (PROGRAMA DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL) Escreva um programa para resolver as EDOs do problema anterior e que também seja capaz de representar graficamente a entrada e a saída de um problema de valor inicial envolvendo essa EDO. Aplique o programa aos Problemas 5 e 9, com valores iniciais de sua escolha.

13. (Sinal dos coeficientes) No Exemplo 1, alguns A_n são positivos, e outros, negativos. É isto fisicamente compreensível?

14–17 OSCILAÇÕES AMORTECIDAS DE REGIME PERMANENTE

Encontre a oscilação de regime permanente de $y'' + cy' + y = r(t)$ com $c > 0$ e $r(t)$ conforme dada. (Mostre os detalhes do que fizer.)

14. $r(t) = a_n \cos nt$

15. $r(t) = \operatorname{sen} 3t$

16. $r(t) = \begin{cases} \pi t & \text{se } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ \pi(\pi - t) & \text{se } \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases}$
e $r(t + 2\pi) = r(t)$

17. $r(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen} nt$

18. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Termo Máximo de Saída. Represente graficamente e discuta as saídas de $y'' + cy' + ky = r(t)$ com $r(t)$ como no Exemplo 1 para diversos valores de c e k, com ênfase no C_n máximo e na razão entre este e o segundo maior $|C_n|$.

19–20 CIRCUITO *RLC*

Encontre a corrente de regime permanente $I(t)$ no circuito *RLC* da Fig. 272, onde $R = 100\ \Omega$, $L = 10$ H, $C = 10^{-2}$ F e $E(t)$ V é como segue, além de ter um período de 2π. Faça um esboço ou gráfico das quatro primeiras somas parciais. Note que os coeficientes da solução diminuem rapidamente.

19. $E(t) = 200t(\pi^2 - t^2)\ (-\pi < t < \pi)$

20. $E(t) = \begin{cases} 100(\pi t + t^2) & \text{se } -\pi < t < 0 \\ 100(\pi t - t^2) & \text{se } 0 < t < \pi \end{cases}$

11.6 Aproximação por Polinômios Trigonométricos

As séries de Fourier desempenham um papel proeminente nas equações diferenciais. Um outro campo onde elas também possuem aplicações muito importantes é a **teoria da aproximação**, que trata da aproximação de funções por outras (usualmente mais simples). Em conexão com a série de Fourier, a idéia é a seguinte.

Consideremos que $f(x)$ seja uma função no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$ e que possa ser representada por uma série de Fourier neste intervalo. Então a ***N*-ésima soma parcial** da série

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

é uma aproximação da função $f(x)$ dada. É natural perguntar se (1) é a "melhor" aproximação de f por um **polinômio trigonométrico de grau *N***, isto é, por uma função da forma

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx) \qquad (N \text{ fixo}) \tag{2}$$

onde "melhor" significa que o "erro" da aproximação é tão pequeno quanto possível.

Naturalmente, primeiro é preciso definir o que queremos dizer com o **erro** E dessa aproximação. Poderíamos escolher o valor máximo de $|f - F|$. Porém, em conexão com as séries de Fourier, é melhor escolher uma definição que meça o grau de concordância entre f e F *no intervalo inteiro* $-\pi \leqq x \leqq \pi$. Isto parece ser preferível, particularmente se f apresentar saltos: na Fig. 275, F é uma boa aproximação geral de f, porém o valor máximo de $|f - F|$ (mais precisamente, o valor *supremo*) é grande (equivalendo a menos da metade do salto de f em x_0). Escolhemos

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 \, dx \,. \tag{3}$$

Chamamos isto de **erro quadrado** de F relativo à função f no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$. Obviamente, $E \geqq 0$.

Sendo N fixo, desejamos determinar os coeficientes em (2) tais que E seja mínimo. Como $(f - F)^2 = f^2 - 2fF + F^2$, temos

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \, dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} fF \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 \, dx. \tag{4}$$

Elevamos (2) ao quadrado, inserimos esse valor na última integral em (4) e calculamos o valor das integrais existentes. Isto fornece as integrais de $\cos^2 nx$ e de $\operatorname{sen}^2 nx$ ($n \geqq 1$), que são iguais a π, e das integrais de $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$ e $(\cos nx)(\operatorname{sen} mx)$, que valem zero (exatamente como na Seção 11.1). Portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx) \right]^2 dx$$
$$= \pi(2A_0^2 + A_1^2 + \cdots + A_N^2 + B_1^2 + \cdots + B_N^2).$$

Insiramos agora (2) na integral de fF em (4). Isto fornece as integrais de $f \cos nx$, bem como de $f \operatorname{sen} nx$, como nas fórmulas de Euler, na Seção 11.1, para a_n e b_n (havendo em cada caso uma multiplicação por A_n ou B_n). Logo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF \, dx = \pi(2A_0a_0 + A_1a_1 + \cdots + A_Na_N + B_1b_1 + \cdots + B_Nb_N).$$

Com essas expressões, (4) torna-se

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - 2\pi\left[2A_0a_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_na_n + B_nb_n)\right] + \pi\left[2A_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(A_n^2 + B_n^2)\right]. \tag{5}$$

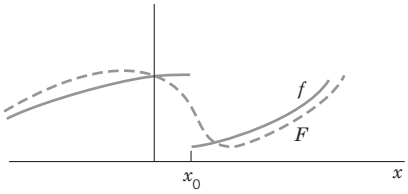


Fig. 275. Erro de aproximação

Agora fazemos $A_n = a_n$ e $B_n = b_n$ em (2). Então, em (5), a segunda linha cancela a metade da expressão sem a integral na primeira linha. Logo, para essa escolha dos coeficientes de F, o erro quadrado, que chamaremos de E^*, é

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \pi\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right]. \tag{6}$$

Finalmente, subtraímos (6) de (5). Então, as integrais se cancelam e obtemos os termos $A_n^2 - 2A_na_n + a_n^2 = (A_n - a_n)^2$ e os termos similares $(B_n - b_n)^2$:

$$E - E^* = \pi\left\{2(A_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^{N}\left[(A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2\right]\right\}.$$

Como, no lado direito, a soma dos quadrados de números reais não pode ser negativa,

$$E - E^* \geqq 0, \qquad \text{portanto,} \qquad E \geqq E^*,$$

e $E = E^*$ se e somente se $A_0 = a_0, \cdots, B_N = b_N$. Isto prova a seguinte propriedade fundamental do valor mínimo das somas parciais das séries de Fourier.

TEOREMA 1

Erro Quadrado Mínimo

O erro quadrado de F em (2) (*com N fixo*) *relativo a f no intervalo* $-\pi \leqq x \leqq \pi$ *é mínimo se e somente se os coeficientes de F em* (2) *forem os coeficientes de Fourier de f. Esse valor mínimo E* é dado por* (6).

De (6), vemos que E^* não pode aumentar à medida que N aumenta, mas pode diminuir. Logo, *com N crescente, as somas parciais da série de Fourier de f fornecem aproximações cada vez melhores de f*, consideradas sob o ponto de vista do erro quadrado.

Como $E^* \geqq 0$ e (6) se verificam para cada N, obtemos de (6) a importante **desigualdade de Bessel**

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx \tag{7}$$

para os coeficientes de Fourier de qualquer função f para a qual a integral no lado direito existe. (Sobre F. W. Bessel, veja a Seção 5.5.)

Pode-se mostrar (veja |C12| no Apêndice 1) que, para tal função f, o **teorema de Parseval** se verifica; isto é, a fórmula (7) é verdadeira com o sinal da igualdade, de modo a se transformar na **identidade de Parseval**[4]

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx. \tag{8}$$

[4] MARC ANTOINE PARSEVAL (1755–1836), matemático francês. Uma interpretação física da identidade é apresentada na próxima seção.

EXEMPLO 1 Erro Quadrado Mínimo para a Onda Dente-de-serra

Calcule o erro quadrado mínimo E^* de $F(x)$ com $N = 1, 2, \cdots, 10, 20, \cdots, 100$ e 1000 em relação a

$$f(x) = x + \pi \quad (-\pi < x < \pi)$$

no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

Solução. $F(x) = \pi + 2(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - + \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{N} \operatorname{sen} Nx)$ pelo Exemplo 3 na Seção 11.3. Disto e de (6),

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)^2 \, dx - \pi \left(2\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right) .$$

Os valores numéricos são:

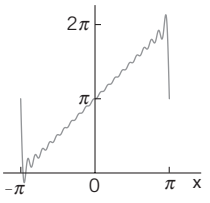


Fig. 276. F com N = 20 do Exemplo 1

N	E^*	N	E^*	N	E^*	N	E^*
1	8,1045	6	1,9295	20	0,6129	70	0,1782
2	4,9629	7	1,6730	30	0,4120	80	0,1561
3	3,5666	8	1,4767	40	0,3103	90	0,1389
4	2,7812	9	1,3216	50	0,2488	100	0,1250
5	2,2786	10	1,1959	60	0,2077	1000	0,0126

$F = S_1, S_2, S_3$ são mostradas na Fig. 266 na Seção 11.3, e $F = S_{20}$ é mostrada na Fig. 276. Embora $|f(x) - F(x)|$ seja grande em $\pm\pi$ (quão grande?), onde f é descontínua, F aproxima-se bastante bem de f no intervalo inteiro, exceto nas proximidades de $\pm\pi$, onde as "ondas" permanecem em decorrência do fenômeno de Gibbs (veja o experimento de álgebra computacional 20, em Problemas Propostos 11.2).

Você poderia imaginar funções f para as quais E^* diminui mais rapidamente à medida que N aumenta? ■

Este é o final da nossa discussão sobre as séries de Fourier, que enfatizou os aspectos práticos dessas séries, conforme exigem as aplicações. Nas três últimas seções deste capítulo, mostraremos como as idéias e as técnicas envolvendo as séries de Fourier podem ser estendidas a funções ***não-periódicas***.

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.6

1–9 ERRO QUADRADO MÍNIMO

Encontre o polinômio trigonométrico $F(x)$ com a forma (2) para o qual o erro quadrado em relação à função $f(x)$ dada no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$ é mínimo, e calcule o valor mínimo para $N = 1, 2, ..., 5$ (ou também para valores maiores, caso você estiver usando um computador).

1. $f(x) = x \ (-\pi < x < \pi)$

2. $f(x) = x^2 \ (-\pi < x < \pi)$

3. $f(x) = |x| \ (-\pi < x < \pi)$

4. $f(x) = x^3 \ (-\pi < x < \pi)$

5. $f(x) = |\operatorname{sen} x| \ (-\pi < x < \pi)$

6. $f(x) = e^{-|x|} \ (-\pi < x < \pi)$

7. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi \\ 0 & \text{se} \quad \frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

9. $f(x) = x(x + \pi)$ se $-\pi < x < 0$, $f(x) = x(-x + \pi)$ se $0 < x < \pi$

10. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Tamanho e Decréscimo de E^*. Compare o tamanho do erro quadrado mínimo E^* para funções de sua escolha. Encontre experimentalmente os fatores dos quais depende a diminuição de E^* com o aumento de N. Para cada função considerada, encontre o menor N tal que $E^* < 0{,}1$.

11. (Monotonicidade) Mostre que o erro quadrado mínimo (6) é uma função monotonamente decrescente de N. Como podemos usar isso na prática?

12–16 IDENTIDADE DE PARSEVAL

Usando a identidade de Parseval, prove que as séries têm as somas indicadas. Calcule as primeiras somas parciais para verificar que a convergência é rápida.

12. $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} = 1{,}01467\ 8032$

(Use o Problema 15 da Seção 11.1.)

13. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} = 1{,}23370\ 0550$

(Use o Problema 13 da Seção 11.1.)

14. $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots$

$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0{,}11685\ 0275$

(Use o Problema 5 da presente seção.)

15. $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}08232\ 3234$

(Use o Problema 21 da presente seção.)

16. $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960} = 1{,}00144\ 7078$

(Use o Problema 9 da presente seção.)

11.7 Integral de Fourier

As séries de Fourier são ferramentas poderosas para se lidar com problemas envolvendo funções que sejam periódicas ou que tenham interesse apenas em intervalos finitos. Tal fato já foi ilustrado nas Seções 11.3 e 11.5, e várias outras aplicações serão mencionadas no Capítulo 12. Visto que, naturalmente, muitos problemas envolvem funções que são **não-periódicas** e que *têm interesse sobre todo o eixo x*, perguntamo-nos o que podemos fazer para estender o método das séries de Fourier a tais funções. Esta idéia nos levará às "integrais de Fourier".

No Exemplo 1, começaremos com uma função especial f_L de período $2L$ e veremos o que acontece à sua série de Fourier se fizermos $L \to \infty$. Então, faremos o mesmo com uma função *arbitrária* f_L de período $2L$. Isto nos dará uma justificativa e uma sugestão para chegarmos ao resultado principal desta seção, que é uma representação integral dada no Teorema 1 (a seguir).

EXEMPLO 1 Onda retangular

Considere a onda retangular periódica $f_L(x)$ de período $2L > 2$ dada por

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -L < x < -1 \\ 1 & \text{se} \quad -1 < x < \ \ 1 \\ 0 & \text{se} \quad \ \ 1 < x < \ L\,. \end{cases}$$

A parte esquerda da Fig. 277 mostra esta função para $2L = 4, 8, 16$, bem como a função não-periódica $f(x)$, que obtemos de f_L se fizermos $L \to \infty$,

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Investiguemos agora o que acontece aos coeficientes de Fourier de f_L à medida que L aumenta. Como f_L é par, $b_n = 0$ para todo n. Para a_n, as fórmulas de Euler (6) na Seção 11.2 dão

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}\,, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\,\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}\,.$$

Esta seqüência de coeficientes de Fourier é chamada de **amplitude espectral** de f_L porque $|a_n|$ é a amplitude máxima da onda $a_n \cos(n\pi x/L)$. A Fig. 277 mostra esse espectro para os períodos $2L = 4, 8, 16$. Vemos que, para valores crescentes de L, essas amplitudes tornam-se cada vez mais densas sobre a parte positiva do eixo w_n, onde $w_n = n\pi/L$. De fato, para $2L = 4, 8, 16$, temos 1, 3, 7 amplitudes por "meia-onda" da função $(2 \operatorname{sen} w_n)/(Lw_n)$ (linhas pontilhadas na figura). Logo, para $2L = 2^k$, temos $2^{k-1} - 1$ amplitudes por meia-onda, de modo que a densidade dessas amplitudes terminará por abarcar todo o eixo w_n positivo (e cairá para zero).

O resultado deste exemplo dá-nos uma impressão intuitiva do que devemos esperar se passarmos de nossa função especial para uma função arbitrária, que é o que faremos a seguir. ■

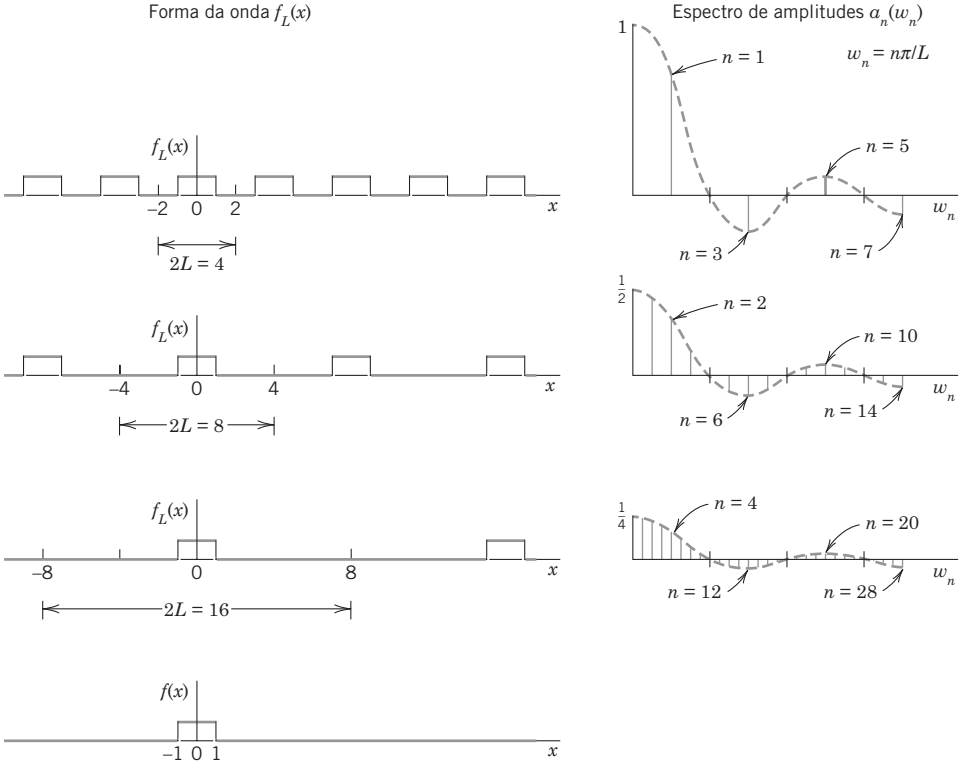


Fig. 277. Formas de onda e espectros de amplitude do Exemplo 1

Das Séries de Fourier às Integrais de Fourier

Consideremos agora uma função periódica qualquer $f_L(x)$ de período $2L$ que possa ser representada por uma série de Fourier

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \operatorname{sen} w_n x), \qquad w_n = \frac{n\pi}{L}$$

e vejamos o que acontece se fizermos $L \to \infty$. Juntamente com o Exemplo 1, o cálculo que aqui fazemos sugerirá que devemos esperar uma integral (em vez de uma série) envolvendo cos wx e sen wx, com w não mais se restringindo aos múltiplos inteiros $w = w_n = n\,\pi/L$ de π/L, porém assumindo *todos* os valores. Também veremos qual será a forma assumida por uma integral desse tipo.

Se inserirmos a_n e b_n, conforme dados pelas fórmulas de Euler (6) da Seção 11.2, e representarmos a variável de integração por v, a série de Fourier de $f_L(x)$ torna-se

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)\,dv + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v\,dv + \operatorname{sen} w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v)\operatorname{sen} w_n v\,dv\right].$$

Fazemos agora

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Então, $1/L = \Delta w/\pi$, e podemos escrever a série de Fourier na forma

$$(1)\qquad f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)\,dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\cos w_n x)\,\Delta w\int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v\,dv + (\operatorname{sen} w_n x)\,\Delta w\int_{-L}^{L} f_L(v)\operatorname{sen} w_n v\,dv\right].$$

Esta representação é válida para qualquer L fixo, arbitrariamente grande, porém finito.

Façamos agora $L \to \infty$ e suponhamos que a função não-periódica resultante

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$$

seja **absolutamente integrável** sobre o eixo x; isto é, o seguinte limite (finito!) existe:

$$(2)\qquad \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}|f(x)|\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}|f(x)|\,dx \quad \left(\text{escrito como } \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\right).$$

Então, $1/L \to 0$, e o valor do primeiro termo no lado direito de (1) aproxima-se de zero. Além disso, $\Delta w = \pi/L \to 0$ e parece ***plausível*** que a série infinita em (1) torne-se uma integral de 0 a ∞, que representa $f(x)$, a saber,

$$(3)\qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\cos wx\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv + \operatorname{sen} wx\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen} wv\,dv\right]dw.$$

Se introduzirmos as notações

$$\mathbf{(4)}\qquad A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen} wv\,dv$$

podemos escrever isto na forma

$$\mathbf{(5)}\qquad f(x) = \int_{0}^{\infty}[A(w)\cos wx + B(w)\operatorname{sen} wx]\,dw.$$

Este é a chamada representação de $f(x)$ por uma **integral de Fourier**.

É claro que nossa aproximação ingênua meramente ***sugere*** a representação (5), embora de modo algum ela o determina; de fato, o limite da série em (1) à medida que Δw se aproxima de 0 não é a definição da integral (3). As condições suficientes para a validade de (5) são as seguintes.

TEOREMA 1

Integral de Fourier

Se $f(x)$ for contínua por intervalos (veja a Seção 6.1) *em cada intervalo finito, se possuir derivada à direita e à esquerda de cada ponto* (veja a Seção 11.1) *e se a integral* (2) *existir, então $f(x)$ pode ser representada por uma integral de Fourier* (5) *com A e B dadas por* (4). *Em um ponto onde $f(x)$ é descontínua, o valor da integral de Fourier é igual à média dos limites de $f(x)$ à esquerda e à direita desse ponto* (veja a Seção 11.1). (Prova na Ref. |C12|; veja o Apêndice 1.)

Aplicações das Integrais de Fourier

A principal aplicação das integrais de Fourier é na resolução de EDOs e EDPs, conforme veremos para as EDPs na Seção 12.6. Entretanto, também podemos usar as integrais de Fourier na integração e na discussão de funções definidas por integral, como os exemplos (2 e 3) a seguir ilustram.

EXEMPLO 2 **Pulso Único, Seno Integral**

Encontre a representação por integral de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 1 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 278).}$$

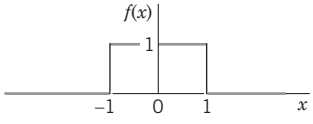


Fig. 278. Exemplo 2

Solução. De (4), obtemos

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wv\,dv = \frac{\operatorname{sen} wv}{\pi w}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2\operatorname{sen} w}{\pi w}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{sen} wv\,dv = 0$$

e (5) dá a resposta

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx \operatorname{sen} w}{w}\,dw. \tag{6}$$

A média dos limites esquerdo e direito de $f(x)$ em $x = 1$ é igual a $(1 + 0)/2$, ou seja, 1/2.

Além disso, de (6) e do Teorema 1, obtemos (multiplicando por $\pi/2$)

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx \operatorname{sen} w}{w}\,dw = \begin{cases} \pi/2 & \text{se} \quad 0 \leqq x < 1, \\ \pi/4 & \text{se} \quad x = 1, \\ 0 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases} \tag{7}$$

Mencionamos que esta integral é chamada de **fator descontínuo de Dirichlet**. (Sobre P. L. Dirichlet, veja a Seção 10.8.)

O caso $x = 0$ é de particular interesse. Se $x = 0$, então (7) fornece

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} w}{w}\,dw = \frac{\pi}{2}. \tag{8*}$$

Vemos que essa integral é o limite da chamada **seno integral.**

$$\operatorname{Si}(u) = \int_{0}^{u}\frac{\operatorname{sen} w}{w}\,dw \tag{8}$$

à medida que $u \to \infty$. A Fig. 279 mostra os gráficos de $\operatorname{Si}(u)$ e do integrando.

No caso de uma série de Fourier, os gráficos das somas parciais são curvas de aproximação da curva da função periódica representada pela série. Similarmente, no caso da integral de Fourier (5), as aproximações são obtidas substituindo-se ∞ pelos números a. Logo, a integral

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{\cos wx \operatorname{sen} w}{w}\,dw \tag{9}$$

aproxima-se do lado direito de (6) e, conseqüentemente, de $f(x)$

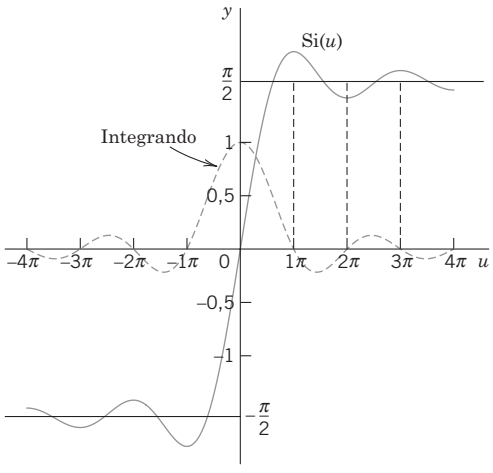


Fig. 279. Integral do seno Si(*u*) e o integrando

A Fig. 280 mostra as oscilações próximas aos pontos da descontinuidade de $f(x)$. Poderíamos esperar que essas oscilações desaparecessem à medida que a se aproximasse do infinito. Porém isso não ocorre; com o aumento de a, elas se deslocam para mais perto dos pontos $x = \pm 1$. Esse comportamento inesperado, que também ocorre em conexão com as séries de Fourier, é conhecido como **fenômeno de Gibbs**. (Veja também em Problemas Propostos 11.2.) É possível explicá-lo representando (9) em termos de seno integral, conforme se segue. Usando (11) do Apêndice A3.1, temos

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \operatorname{sen} w}{w}\,dw = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}(w + wx)}{w}\,dw + \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}(w - wx)}{w}\,dw.$$

Na primeira integral do lado direito, fazemos $w + wx = t$. Então, $dw/w = dt/t$, e $0 \leqq w \leqq a$ corresponde a $0 \leqq t \leqq (x + 1)a$. Na última integral, fazemos $w - wx = -t$. Então, $dw/w = dt/t$, e $0 \leqq w \leqq a$ corresponde a $0 \leqq t \leqq (x - 1)a$. Como sen $(-t) = -\operatorname{sen} t$, obtemos, assim,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \operatorname{sen} w}{w}\,dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{(x+1)a} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{(x-1)a} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

Disto e de (8), vemos que nossa integral (9) é igual a

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(a[x + 1]) - \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(a[x - 1])$$

e as oscilações na Fig. 280 resultam das oscilações da Fig. 279. O aumento de a corresponde a uma transformação de escala sobre o eixo e provoca o desvio das oscilações (ondas) em direção aos pontos de descontinuidade –1 e 1. ■

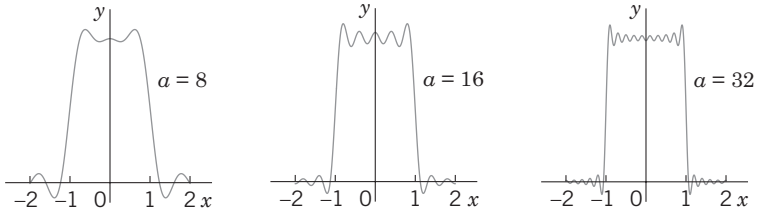


Fig. 280. A integral (9) para $a = 8$, 16 e 32

Integral de Fourier de Cossenos e Integral de Fourier de Senos

Para uma função par ou ímpar, a integral de Fourier torna-se mais simples. Exatamente como no caso das séries de Fourier (Seção 11.3), ela tem o interesse prático de poupar trabalho e evitar erros. As simplificações decorrem imediatamente das fórmulas que acabamos de obter.

(10)
$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv\,dv.$$

A integral de Fourier então se reduz à **integral de Fourier de cossenos**

(11)
$$f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw \qquad (f \text{ par}).$$

Similarmente, se $f(x)$ for uma função ***ímpar***, então em (4) temos $A(w) = 0$ e

(12) $$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\ \text{sen}\ wv\ dv.$$

A integral de Fourier (5) reduz-se então à **integral de Fourier de senos**

(13) $$f(x) = \int_0^\infty B(w)\ \text{sen}\ wx\ dw \qquad (f \text{ ímpar}).$$

Cálculo do Valor das Integrais

Anteriormente nesta seção, observamos que a principal aplicação da integral de Fourier está nas equações diferenciais, embora as representações por integrais de Fourier também ajudem no cálculo dos valores de certas integrais. Para vermos isto, mostremos este método para um caso importante, que são as integrais de Laplace.

EXEMPLO 3 Integrais de Laplace

Obteremos agora as integrais de Fourier de cosseno e de senos para $f(x) = e^{-kx}$, onde $x > 0$ e $k > 0$ (Fig. 281). Esse resultado será usado para calcularmos o valor das chamadas integrais de Laplace.

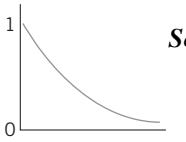


Fig. 281. $f(x)$ do Exemplo 3

Solução. **(a)** De (10), temos $A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv\ dv$. Ora, integrando por partes,

$$\int e^{-kv}\cos wv\ dv = -\frac{k}{k^2 + w^2}\ e^{-kv}\left(-\frac{w}{k}\ \text{sen}\ wv + \cos wv\right).$$

Se $v = 0$, a expressão no lado direito é igual a $-k/(k^2 + w^2)$. Se v se aproxima do infinito, essa expressão se aproxima de zero devido ao fator exponencial. Portanto,

(14) $$A(w) = \frac{2k/\pi}{k^2 + w^2}.$$

Substituindo isto em (11), obtemos assim a representação da integral de Fourier de cossenos

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2 + w^2}\ dw \qquad (x > 0,\quad k > 0).$$

Por esta representação, vemos que

(15) $$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2 + w^2}\ dw = \frac{\pi}{2k}\ e^{-kx} \qquad (x > 0,\quad k > 0).$$

(b) Similarmente, de (12), temos que $B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\ \text{sen}\ wv\ dv$. Integrando por partes,

$$\int e^{-kv}\ \text{sen}\ wv\ dv = -\frac{w}{k^2 + w^2}\ e^{-kv}\left(\frac{k}{w}\ \text{sen}\ wv + \cos wv\right).$$

Esta expressão é igual a $-w/(k^2 + w^2)$ se $v = 0$, e aproxima-se de zero quando $v \to \infty$. Portanto,

(16) $$B(w) = \frac{2w/\pi}{k^2 + w^2}.$$

De (13), obtemos, portanto, a representação da integral de Fourier de senos

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\ \text{sen}\ wx}{k^2 + w^2}\ dw.$$

Disto, vemos que

(17) $$\int_0^\infty \frac{w\ \text{sen}\ wx}{k^2 + w^2}\ dw = \frac{\pi}{2}\ e^{-kx} \qquad (x > 0,\quad k > 0).$$

As integrais (15) e (17) são chamadas de **integrais de Laplace.** ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.7

1–6 CÁLCULO DO VALOR DE INTEGRAIS

Mostre que as integrais dadas representam as funções indicadas. *Sugestão*. Use (5), (l1) ou (13); a integral lhe informará qual equação usar e seu valor dirá qual função considerar. (Mostre os detalhes do que fizer.)

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos xw + w \operatorname{sen} xw}{1 + w^2}\, dw = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \\ \pi e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} w - w \cos w}{w^2} \operatorname{sen} xw\, dw = \begin{cases} \pi x/2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \pi/4 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos xw}{1 + w^2}\, dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \text{ se } x > 0$$

4. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} w}{w} \cos xw\, dw = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } 0 \leqq x < 1 \\ \pi/4 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

5. $$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi w/2)}{1 - w^2} \cos xw\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & \text{se } 0 < |x| < \pi/2 \\ 0 & \text{se } |x| \geqq \pi/2 \end{cases}$$

6. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \pi w \operatorname{sen} xw}{1 - w^2}\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \leqq x \leqq \pi \\ 0 & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

7–12 REPRESENTAÇÕES DA INTEGRAL DE FOURIER DE COSSENOS

Represente $f(x)$ na forma da integral (11).

7. $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases}$$

9. $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

10. $$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 - x/2 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

11. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

12. $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases}$$

13. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Aproximações de Integrais de Fourier de Cossenos. Represente graficamente as integrais dos Problemas 7, 9 e 11 como funções de x. Faça o gráfico das aproximações obtidas pela substituição de ∞ por limites superiores finitos de sua escolha. Compare a qualidade das aproximações. Escreva um breve relatório sobre suas observações e resultados empíricos.

14–19 REPRESENTAÇÕES DA INTEGRAL DE FOURIER DE SENOS

Represente $f(x)$ na forma da integral (13).

14. $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases}$$

15. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

16. $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

17. $$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

18. $$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

19. $$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases}$$

20. PROJETO. Propriedades das Integrais de Fourier.

(a) Integral de Fourier de cossenos. Mostre que (11) implica que

(a1) $$f(ax) = \frac{1}{a} \int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right) \cos xw\, dw$$

$(a > 0)$ (*Mudança de escala*)

(a2) $$xf(x) = \int_0^\infty B^*(w) \operatorname{sen} xw\, dw,$$

$$B^* = -\frac{dA}{dw}, \qquad A \text{ como em (10)}$$

(a3) $$x^2 f(x) = \int_0^\infty A^*(w) \cos xw\, dw,$$

$$A^* = -\frac{d^2A}{dw^2}.$$

(b) Resolva o Problema 8 aplicando (a3) ao resultado do Problema 7.

(c) Verifique (a2) para $f(x) = 1$ se $0 < x < a$ e $f(x) = 0$ se $x > a$.

(d) Integral de Fourier de senos. Encontre fórmulas para a integral de Fourier de senos similares às obtidas em (a).

11.8 Transformadas de Fourier de Cossenos e de Senos

Uma **transformada integral** é uma transformação na forma de uma integral que produz, a partir de funções dadas, novas funções dependentes de uma variável diferente. O principal interesse dessas transformações é seu uso como ferramentas de resolução de EDOs, EDPs e equações integrais, além do fato de elas freqüentemente também serem de valia na manipulação e nas aplicações das funções especiais. A **transformada de Laplace** (Capítulo 6) é desse tipo, sendo, de longe, a transformada integral de maior importância em engenharia.

As próximas transformadas em ordem de importância são as de Fourier. Veremos que é possível, de uma maneira um tanto simples, obter essas transformadas a partir da integral de Fourier vista na Seção 11.7. Nesta seção, consideraremos duas delas, que serão reais, e na seção seguinte, uma terceira, que será complexa.

Transformada de Fourier de Cossenos

Para uma função $f(x)$ ***par***, a integral de Fourier é a integral de Fourier de cossenos

$$(1) \qquad \text{(a)} \quad f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx \, dw, \qquad \text{onde} \qquad \text{(b)} \quad A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv \, dv$$

[veja (10) e (11) da Seção 11.7]. Façamos agora $A(w) = \sqrt{2/\pi}\, \hat{f}_c(w)$, onde c indica "cosseno". Então, de (1b) e escrevendo $v = x$, temos

$$\textbf{(2)} \qquad \hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx \, dx$$

e de (1a),

$$\textbf{(3)} \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(w) \cos wx \, dw.$$

ATENÇÃO! Em (2), fazemos a integração em relação a x, ao passo que em (3), a integração é feita em relação a w. A fórmula (2) fornece a partir de $f(x)$ uma nova função $\hat{f}_c(w)$, chamada de **transformada de Fourier de cossenos** de $f(x)$. A fórmula (3) nos devolve $f(x)$ a partir de $\hat{f}_c(w)$, de modo que, portanto, dizemos que $f(x)$ é a **transformada inversa de Fourier de cossenos** de $\hat{f}_c(w)$.

O processo de obtenção da transformada $\hat{f}_c$ a partir de uma dada função f também é chamado de **transformada de Fourier de cossenos** ou de *método da transformada de Fourier de cossenos*.

Transformada de Fourier de Senos

Similarmente, para uma função $f(x)$ ***ímpar***, a integral de Fourier é a integral de Fourier de senos [veja (12) e (13) da Seção 11.7]

$$(4) \qquad \text{(a)} \quad f(x) = \int_0^\infty B(w) \operatorname{sen} wx \, dw, \qquad \text{onde} \qquad \text{(b)} \quad B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \operatorname{sen} wv \, dv.$$

Agora fazemos $B(w) = \sqrt{2/\pi}\, \hat{f}_s(w)$, onde s indica "seno". Então, de (4b) e escrevendo $v = x$, temos

$$\textbf{(5)} \qquad \hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} wx \, dx.$$

Esta é a chamada **transformada de Fourier de senos** de $f(x)$. Similarmente, de (4a), temos

$$\textbf{(6)} \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(w) \operatorname{sen} wx \, dw.$$

Esta é a chamada **transformada inversa de Fourier de senos** de $\hat{f}_s(w)$. O processo de se obter $\hat{f}_s(w)$ a partir de $f(x)$ é também chamado de **transformada de Fourier de senos** ou de *método da transformada de Fourier de senos*.

Outras notações são

$$\mathscr{F}_c(f) = \hat{f}_c, \qquad \mathscr{F}_s(f) = \hat{f}_s$$

e $\mathscr{F}_c^{-1}$ e $\mathscr{F}_s^{-1}$ para as inversas de $\mathscr{F}_c$ e $\mathscr{F}_s$, respectivamente.

EXEMPLO 1 Transformada de Fourier de Cossenos e de Senos

Encontre a transformada de Fourier de cossenos e de senos da função

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases} \qquad \text{(Fig. 282).}$$

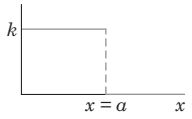


Fig. 282. *f*(*x*) do Exemplo 1

Solução. Das definições (2) e (5), obtemos por integração

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \int_0^a \cos wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \left(\frac{\operatorname{sen} aw}{w}\right)$$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \int_0^a \operatorname{sen} wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \left(\frac{1 - \cos aw}{w}\right).$$

Isto concorda com a fórmula 1 nas duas primeiras tabelas da Seção 11.1 (onde $k = 1$).

Note que, para $f(x) = k = const.$ $(0 < x < \infty)$, essas transformadas não existem. (Por quê?) ■

EXEMPLO 2 Transformada de Fourier de Cossenos da Função Exponencial

Encontre $\mathscr{F}_c(e^{-x})$.

Solução. Por integração por partes e recursão,

$$\mathscr{F}_c(e^{-x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-x}}{1 + w^2}\, (-\cos wx + w \operatorname{sen} wx) \Big|_0^\infty = \frac{\sqrt{2/\pi}}{1 + w^2}.$$

Isto concorda com a fórmula 3 na Tabela I da Seção 11.10, com $a = 1$. Veja também o próximo exemplo. ■

O que fizemos para introduzir as duas transformadas integrais em consideração? Na verdade, não muito: mudamos as notações A e B para obtermos uma distribuição "simétrica" da constante $2/\pi$ nas fórmulas originais (10)–(13) da Seção 11.7. Esta redistribuição é uma conveniência-padrão, mas não é essencial. Poderíamos ter passado sem ela.

E o que ganhamos? Mostraremos a seguir que essas transformadas têm propriedades operacionais que lhes permitem converter derivações em operações algébricas (como a transformada de Laplace o faz). Esta é a chave para a aplicação dessas transformadas na resolução de equações diferenciais.

Linearidade, Transformadas de Derivadas

Se $f(x)$ for absolutamente integrável (veja a Seção 11.7) sobre o eixo x positivo e for contínua termo a termo (veja a Seção 6.1) em cada intervalo finito, então as transformadas de Fourier de cossenos e de senos de f existem.

Além disso, se f e g tiverem as transformadas de Fourier de cossenos e de senos, o mesmo ocorre com $af + bg$ para quaisquer constantes a e b e, por (2),

$$\mathscr{F}_c(af + bg) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [af(x) + bg(x)] \cos wx\, dx$$

$$= a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx\, d$$

O lado direito é $a\mathscr{F}_c(f) + b\mathscr{F}_c(g)$. Algo similar ocorre com $\mathscr{F}_s$, por (5). Isto mostra que as transformadas de Fourier de cossenos e de senos são **operações lineares**,

(7)

$$\text{(a)} \quad \mathscr{F}_c(af + bg) = a\mathscr{F}_c(f) + b\mathscr{F}_c(g),$$

$$\text{(b)} \quad \mathscr{F}_s(af + bg) = a\mathscr{F}_s(f) + b\mathscr{F}_s(g).$$

TEOREMA 1

Transformadas de Cosseno e de Seno das Derivadas

Consideremos que $f(x)$ seja contínua e absolutamente integrável no eixo x, que $f'(x)$ seja contínua por intervalos em cada intervalo finito, e que $f(x) \to 0$ à medida que $x \to \infty$. Então,

(8)

(a) $$\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0),$$

(b) $$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}.$$

PROVA A demonstração decorre das definições fazendo-se uma integração por partes, a saber,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \cos wx\, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \cos wx \,\Big|_0^\infty + w \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} wx\, dx \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0) + w\mathcal{F}_s\{f(x)\};\end{aligned}$$

e, similarmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \operatorname{sen} wx\, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \operatorname{sen} wx \,\Big|_0^\infty - w \int_0^\infty f(x) \cos wx\, dx \right] \\ &= 0 - w\mathcal{F}_c\{f(x)\}.\end{aligned}$$

■

A fórmula (8a) com f' no lugar de f dá (quando f', f'' satisfazem às suposições respectivas para f, f' no Teorema 1)

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0);$$

então, por (8b)

(9a) $$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0).$$

Similarmente,

(9b) $$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, wf(0).$$

Uma aplicação fundamental de (9) ao caso das EDPs será dada na Seção 12.6. Por enquanto, mostraremos como (9) pode ser usada na obtenção de transformadas.

EXEMPLO 3 **Uma Aplicação da Fórmula Operacional (9)**

Encontre a transformada de Fourier de cossenos $\mathcal{F}_c(e^{-ax})$ de $f(x) = e^{-ax}$, onde $a > 0$.

Solução. Por derivação, $(e^{-ax})'' = a^2e^{-ax}$; portanto,

$$a^2f(x) = f''(x)$$

Disto, de (9a) e da linearidade (7a),

$$a^2\mathcal{F}_c(f) = \mathcal{F}_c(f'')$$

$$= -w^2\mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

$$= -w^2\mathcal{F}_c(f) + a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

Portanto,

$$(a^2 + w^2)\mathcal{F}_c(f) = a\sqrt{2/\pi}.$$

A *resposta* é (veja a Tabela I, da Seção 11.10)

$$\mathcal{F}_c(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a}{a^2 + w^2}\right) \qquad (a > 0).$$ ■

Tabelas das transformadas de Fourier de cossenos e de senos são fornecidas na Seção 11.10.

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.8

1–10 TRANSFORMADA DE FOURIER DE COSSENOS

1. Considere $f(x) = -1$ se $0 < x < 1$, $f(x) = 1$ se $1 < x < 2$, $f(x) = 0$ se $x > 2$. Encontre $\hat{f}_c(w)$.

2. Considere $f(x) = x$ se $0 < x < k$, $f(x) = 0$ se $x > k$. Encontre $\hat{f}_c(w)$.

3. Obtenha por integração a fórmula 3 na Tabela 1 da Seção 11.10.

4. Encontre a transformada inversa de Fourier de cossenos para $f(x)$ a partir da resposta do Problema 1. *Sugestão*: use o Problema 4 da Seção 11.7.

5. Obtenha $\mathcal{F}_c^{-1}(1/(1 + w^2))$ a partir do Problema 3 da Seção 11.7.

6. Obtenha $\mathcal{F}_c^{-1}(e^{-w})$ por integração.

7. Encontre $\mathcal{F}_c((1 - x^2)^{-1}\cos(\pi x/2))$. *Sugestão*: use o Problema 5 da Seção 11.7.

8. Considere $f(x) = x^2$ se $0 < x < 1$, e 0 se $x > 1$. Encontre $\mathcal{F}_c(f)$.

9. A transformada de Fourier de cossenos de x^{-1} sen x existe? E de $x^{-1}\cos x$? Justifique.

10. $f(x) = 1$ $(0 < x < \infty)$ não possui transformada de Fourier de cossenos ou de senos. Justifique.

11–20 TRANSFORMADA DE FOURIER DE SENOS

11. Encontre $\mathcal{F}_s(e^{-\pi x})$ por integração.

12. Encontre a resposta do Problema 11 a partir de (9b).

13. Obtenha a fórmula 8 da Tabela II da Seção 11.11 a partir de (8b) e de uma fórmula apropriada na Tabela I.

14. Considere que $f(x) = \text{sen } x$ se $0 < x < \pi$ e 0 se $x > \pi$. Encontre $\mathcal{F}_s(f)$. Compare com o Problema 6 da Seção 11.7. Comente.

15. Na Tabela II da Seção 11.10, obtenha a fórmula 2 a partir da fórmula 4, usando $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ [(30) Apêndice 3.1].

16. Mostre que $\mathcal{F}_s(x^{-1/2}) = w^{-1/2}$ fazendo $wx = t^2$ e usando $S(\infty) = \sqrt{\pi/8}$ em (38) do Apêndice 3.1.

17. Obtenha $\mathcal{F}_s(e^{-ax})$ a partir de (8a) e da fórmula 3 na Tabela I da Seção 11.10.

18. Mostre que $\mathcal{F}_s(x^{-3/2}) = 2w^{1/2}$. *Sugestão*: faça $wx = t^2$, integre por partes e use $C(\infty) = \sqrt{\pi/8}$ em (38) do Apêndice 3.1.

19. **(Mudança da escala)** Usando a notação de (5), mostre que $f(ax)$ tem a transformada de Fourier de senos $(1/a)\hat{f}_s(w/a)$.

20. **PROJETO ESCRITO. Obtenção de Transformadas de Fourier de Cossenos e de Senos**. Escreva um breve relatório sobre as maneiras de se obter essas transformadas, ilustrando o texto com seus próprios exemplos.

11.9 Transformada de Fourier. Transformadas Discretas e Rápidas de Fourier

As duas transformadas vistas na última seção são reais. Consideremos agora uma terceira, chamada de **transformada de Fourier**, que é complexa. Obteremos essa transformada a partir da integral complexa de Fourier, que explicaremos primeiro.

Forma Complexa da Integral de Fourier

A integral de Fourier (real) é [veja (4) e (5) da Seção 11.7]

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\,\text{sen } wx]\, dw$$

onde

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\, dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\text{sen } wv\, dv.$$

Substituindo A e B na integral para f, temos

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v)\,[\cos wv \cos wx + \operatorname{sen} wv \operatorname{sen} wx]\,dv\,dw.$$

Pela fórmula da adição de cossenos [(6) no Apêndice A3.1], a expressão entre colchetes $[\cdots]$ é igual a cos $(wv - wx)$ ou, como o cosseno é par, cos $(wx - wv)$. Obtemos, portanto

$$(1^*) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx - wv)\,dv\right] dw.$$

A integral entre colchetes é uma função *par* de w, que chamaremos de $F(w)$, porque cos $(wx - wv)$ é uma função par de w, a função f não depende de w e integramos em relação a v (e não w). Logo, a integral de $F(w)$ de $w = 0$ a ∞ é 1/2 vez a integral de $F(w)$ de $-\infty$ a ∞. Portanto (observe a mudança do limite de integração!),

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx - wv)\,dv\right] dw.$$

Dizemos que a integral da forma (1) com sen em vez de cos é zero:

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v)\operatorname{sen}(wx - wv)\,dv\right] dw = 0.$$

Isto é verdadeiro, visto que sen $(wx - wv)$ é uma função ímpar de w, o que faz com que a integral entre colchetes seja uma função ímpar de w, que chamaremos de $G(w)$. Logo, a integral de $G(w)$ de $-\infty$ a ∞ é zero, conforme havíamos dito.

Consideremos agora o integrando (1) mais i $(= \sqrt{-1})$ vezes o integrando de (2), e usemos a **fórmula de Euler** [(11) na Seção 2.2]

$$(3) \qquad e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Fazendo $wx - wv$ ao invés de x em (3) e multiplicando por $f(v)$, obtemos

$$f(v)\cos(wx - wv) + if(v)\operatorname{sen}(wx - wv) = f(v)e^{i(wx - wv)}.$$

Logo, o resultado de somar (1) com o produto de i por (2), e que se chama **integral complexa de Fourier**, é

$$\mathbf{(4)} \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v)e^{iw(x-v)}\,dv\,dw \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ficamos agora a um pequeno passo do nosso objetivo atual, a transformada de Fourier.

Transformada de Fourier e Sua Inversa

Em (4), escrevendo a função exponencia1 como um produto de funções exponenciais, temos

$$\mathbf{(5)} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{-iwv}\,dv\right] e^{iwx}\,dw.$$

A expressão entre colchetes é uma função de w, sendo denotada por $\hat{f}(w)$ e chamada de **transformada de Fourier** de f; escrevendo $v = x$, temos

$$(6) \qquad \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}\,dx.$$

Com isto, (5) torna-se

$$\mathbf{(7)} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(w)e^{iwx}\,dw$$

e é chamada de **transformada inversa de Fourier** de $\hat{f}(w)$.

Uma outra notação para a transformada de Fourier é

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f),$$

de modo que

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}).$$

O processo de obtenção da transformada de Fourier $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ a partir de uma dada função f é também chamado de **transformada de Fourier** ou de *método da transformada de Fourier*.

As condições suficientes para a existência da transformada de Fourier (envolvendo conceitos definidos nas Seções 6.1 e 11.7) são as seguintes, que enunciamos sem provar.

TEOREMA 1 **Existência da Transformada de Fourier**

Se $f(x)$ é absolutamente integrável no eixo x e contínua por intervalos em cada intervalo finito, então a transformada de Fourier $\hat{f}(w)$ de $f(x)$ dada por (6) *existe.*

EXEMPLO 1 **Transformada de Fourier**

Encontre a transformada de Fourier de $f(x) = 1$ se $|x| < 1$ e $f(x) = 0$ nos demais casos.

Solução. Usando (6) e integrando, obtemos

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwx}}{-iw} \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{-iw\sqrt{2\pi}}\,(e^{-iw} - e^{iw}).$$

Como em (3), temos $e^{iw} = \cos w + i \operatorname{sen} w$, $e^{-iw} = \cos w - i \operatorname{sen} w$, e, por subtração,

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2i \operatorname{sen} w.$$

Substituindo esta expressão no lado direito da última fórmula, vemos que i desaparece e obtemos a resposta

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\operatorname{sen} w}{w}.$$

■

EXEMPLO 2 **Transformada de Fourier**

Encontre a transformada de Fourier $\mathcal{F}(e^{-ax})$ de $f(x) = e^{-ax}$ se $x > 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$; aqui, $a > 0$.

Solução. Da definição (6), obtemos por integração

$$\mathcal{F}(e^{-ax}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-iwx}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-(a+iw)x}}{-(a+iw)} \Bigg|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(a+iw)}.$$

Isto prova a fórmula 5 da Tabela III na Seção 11.10. ■

Interpretação Física: Espectro

A natureza da representação (7) de $f(x)$ torna-se evidente se a considerarmos como uma superposição de oscilações senoidais de todas as freqüências possíveis, chamada de **representação espectral**. Tal nome é sugerido pela óptica, onde a luz é uma superposição de cores (freqüências) desse tipo. Em (7), a **"densidade espectral"** $\hat{f}(w)$ mede a intensidade de $f(x)$ no intervalo de freqüência entre w e $w + \Delta w$ (com Δw pequeno e fixo). Dizemos então que, em conexão com as vibrações, a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2\,dw$$

pode ser interpretada como a **energia total** do sistema físico. Logo, uma integral de $|\hat{f}(w)|^2$ de a até b dá a contribuição das freqüências w entre a e b para a energia total.

Para deixar isso plausível, comecemos com um sistema mecânico fornecendo uma única freqüência, a saber, o oscilador harmônico (massa em uma mola, Seção 2.4)

$$my'' + ky = 0.$$

Aqui, representamos o tempo t por x. Multiplicando por y', temos $my'\,y'' + ky'y = 0$. Por integração,

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 = E_0 = const.$$

onde $v = y'$ é a velocidade. O primeiro termo é a energia cinética, o segundo é a energia potencial e E_0, a energia total do sistema. Ora, uma solução geral é (usando (3) da Seção 11.4 com $t = x$)

$$y = a_1 \cos w_0 x + b_1 \operatorname{sen} w_0 x = c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x}, \qquad w_0^2 = k/m$$

onde $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$, $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$. Escrevemos simplesmente $A = c_1 e^{iw_0 x}$, $B = c_{-1} e^{-iw_0 x}$. Então, $y = A + B$. Por derivação, $v = y' = A' + B' = iw_0(A - B)$. A substituição de v e y no lado esquerdo da equação para E_0 fornece

$$E_0 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 = \tfrac{1}{2}m(iw_0)^2(A - B)^2 + \tfrac{1}{2}k(A + B)^2.$$

Aqui, $w_0^2 = k/m$, conforme enunciado há pouco; logo, $mw_0^2 = k$. Também $i^2 = -1$, de modo que

$$E_0 = \tfrac{1}{2}k\left[-(A - B)^2 + (A + B)^2\right] = 2kAB = 2kc_1 e^{iw_0 x} c_{-1} e^{-iw_0 x} = 2kc_1 c_{-1} = 2k|c_1|^2.$$

Portanto, *a energia é proporcional ao quadrado da amplitude* $|c_1|$.

Numa etapa seguinte, se um sistema mais complicado levar a uma solução periódica $y = f(x)$ que pode ser representada por uma série de Fourier, então, ao invés do único termo da energia $|c_1|^2$, obtemos uma série de quadrados $|c_n|^2$ dos coeficientes de Fourier dados por (6) da Seção 11.4. Neste caso, temos um "**espectro discreto**" (ou "**espectro puntual**") consistindo em um número contável de freqüências isoladas (infinitamente grande, em geral), com os $|c_n|^2$ correspondentes sendo as contribuições dadas à energia total.

Finalmente, um sistema cuja solução possa ser representada por uma integral (7) leva à integral anterior para a energia, como é plausível a partir dos casos que acabamos de discutir.

Linearidade. Transformada de Fourier de Derivadas

A partir de transformadas dadas, é possível obter novas transformadas pelo

TEOREMA 2 **Linearidade da Transformada de Fourier**

A transformada de Fourier é uma ***operação linear****; ou seja, para quaisquer funções $f(x)$ e $g(x)$ cujas transformadas de Fourier existem e para quaisquer constantes a e b, a transformada de Fourier de $af + bg$ existe, e*

(8) $$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

PROVA Isto se verifica porque a integração é uma operação linear, de modo que (6) fornece

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]e^{-iwx}\,dx \\ &= a\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx + b\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iwx}\,dx \\ &= a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}.\end{aligned}$$

■

Aplicando a transformada de Fourier às equações diferenciais, a propriedade-chave é que a derivação das funções corresponde à multiplicação da transformada por iw:

TEOREMA 3 **Transformada de Fourier da Derivada de *f(x)***

Consideremos que $f(x)$ seja contínua sobre o eixo x e que $f(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Além disso, consideremos que $f'(x)$ seja absolutamente integrável sobre o eixo x. Então,

(9) $$\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

PROVA Da definição de transformada de Fourier, temos

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx}\,dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\, dx \right].$$

Como $f(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, temos o resultado desejado, a saber,

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = 0 + iw\mathcal{F}\{f(x)\}.$$ ■

Duas aplicações sucessivas de (9) dão

$$\mathcal{F}(f'') = iw\mathcal{F}(f') = (iw)^2\mathcal{F}(f).$$

Como $(iw)^2 = -w^2$, temos para a transformada da derivada segunda de f

(10) $$\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

Algo similar ocorre com as derivadas de ordem superior.

A Seção 12.6 apresentará uma aplicação de (10) às equações diferenciais. Por enquanto, mostremos como (9) pode ser usada para obter transformadas.

EXEMPLO 3 **Aplicação da Fórmula Operacional (9)**

Encontre a transformada de Fourier de xe^{-x^2} a partir da Tabela III da Seção 11.10.

Solução. Usemos (9). Pela fórmula 9 da Tabela III,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(xe^{-x^2}) &= \mathcal{F}\left\{-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\,\mathcal{F}\left\{\left(e^{-x^2}\right)'\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\,iw\mathcal{F}(e^{-x^2}) \\
&= -\frac{1}{2}\,iw\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-w^2/4} \\
&= -\frac{iw}{2\sqrt{2}}\,e^{-w^2/4}.
\end{aligned}$$ ■

Convolução

A **convolução** $f * g$ das funções f e g é definida por

(11) $$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x - p)\, dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - p)g(p)\, dp.$$

O propósito é o mesmo que no caso das transformadas de Laplace (Seção 6.5): fazer a convolução de duas funções e então considerar a transformada da convolução é o mesmo que multiplicar as transformadas dessas funções (e multiplicá-las por $\sqrt{2\pi}$):

TEOREMA 4 **Teorema da Convolução**

Suponhamos que $f(x)$ e $g(x)$ sejam contínuas por intervalos, limitadas e absolutamente integráveis sobre o eixo x. Então,

(12) $$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

PROVA Pela definição,

$$\mathcal{F}(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x - p)\, dp\, e^{-iwx}\, dx.$$

Trocando a ordem de integração, temos

$$\mathcal{F}(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x - p)e^{-iwx}\, dx\, dp.$$

Ao invés de x, façamos agora $x - p = q$ como uma nova variável de integração. Então, $x = p + q$ e

$$\mathcal{F}(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-iw(p+q)}\, dq\, dp.$$

Esta integral dupla pode ser escrita como um produto de duas integrais e fornece o resultado desejado

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-iwp}\, dp \int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-iwq}\, dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\right]\left[\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(g)\right] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).\end{aligned}$$

■

Calculando a transformada inversa de Fourier em ambos os lados de (12), escrevendo $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ e $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$ como antes, e notando que $\sqrt{2\pi}$ e $1/\sqrt{2\pi}$ em (12) e (7) se cancelam, obtemos

(13)
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}\, dw,$$

uma fórmula que nos ajudará a resolver equações diferenciais parciais (Seção 12.6).

Transformada Descontínua de Fourier (TDF), Transformada Rápida de Fourier (TRF)

Ao usarmos as séries de Fourier, as transformadas de Fourier e as aproximações trigonométricas (Seção 11.6), temos que supor que uma função $f(x)$, a ser expandida ou transformada, seja dada para algum intervalo, sobre o qual integramos segundo as fórmulas de Euler etc. Ora, muito freqüentemente uma função $f(x)$ é dada apenas em termos de valores para um número finito de pontos, e é interessante estender a análise de Fourier para este caso. A principal aplicação dessa "análise de Fourier discreta" refere-se a grandes quantidades de dados igualmente espaçados, como ocorrem em telecomunicações, em análise de séries temporais e em vários problemas de simulação. Nessas situações, onde tratamos de valores amostrais ao invés de funções, podemos substituir a transformada de Fourier pela chamada **transformada descontínua de Fourier (TDF)**, do seguinte modo.

Consideremos que $f(x)$ seja periódica e que, por simplicidade, tenha o período 2π. Suponhamos que sejam feitas N medidas de $f(x)$ sobre o intervalo $0 \leqq x \leqq 2\pi$ em pontos regularmente espaçados

(14)
$$x_k = \frac{2\pi k}{N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N - 1.$$

Também dizemos que estamos retirando uma **amostra** de $f(x)$ nesses pontos. Desejamos agora determinar um **polinômio trigonométrico complexo**

(15)
$$q(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{inx_k}$$

que **interpola** $f(x)$ nos nós (14), ou seja, $q(x_k) = f(x_k)$, escrevendo por extenso, com f_k representando $f(x_k)$,

(16)
$$f_k = f(x_k) = q(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{inx_k}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N - 1.$$

Logo, precisamos determinar os coeficientes $c_0, \cdots, c_{N-1}$ tais que (16) se verifique. Fazemos isto usando uma idéia similar à empregada na Seção 11.1 para obter os coeficientes de Fourier empregando a ortogonalidade do sistema trigonométrico. Ao invés de integrais, agora consideramos somas. A saber, multiplicamos (16) por e^{-imx_k} (note o sinal negativo!) e somamos em k de 0 a $N - 1$. Então, trocamos a ordem das duas somas e inserimos x_k de (14). Isto fornece

(17)
$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-imx_k} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{i(n-m)x_k} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(n-m)2\pi k/N}.$$

Agora

$$e^{i(n-m)2\pi k/N} = \left[e^{i(n-m)2\pi/N}\right]^k.$$

Representamos $[\cdots]$ por r. Para $n = m$, temos que $r = e^0 = 1$. A soma *destes* termos em k é igual a N, o número desses termos. Para $n \neq m$, temos que $r \neq 1$ e, pela fórmula da soma geométrica [(6) na Seção 15.1 com $q = r$ e $n = N - 1$],

$$\sum_{k=0}^{N-1} r^k = \frac{1 - r^N}{1 - r} = 0$$

pois $r^N = 1$; de fato, com k, m, e n são inteiros,

$$r^N = e^{i(n-m)2\pi k} = \cos 2\pi k(n - m) + i \operatorname{sen} 2\pi k(n - m) = 1 + 0 = 1.$$

Isto mostra que o lado direito de (17) é igual a $c_m N$. Escrevendo n no lugar de m e dividindo por N, obtemos assim a desejada fórmula dos coeficientes

(18*)
$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-inx_k} \qquad f_k = f(x_k), \quad n = 0, 1, \cdots, N - 1.$$

Como o cálculo de c_n (pela transformada rápida de Fourier, a seguir) envolve sucessivas diminuições pela metade do tamanho N do problema, é prático eliminar o fator $1/N$ de c_n e definir a **transformada discreta de Fourier** do sinal dado $\mathbf{f} = [f_0 \quad \cdots \quad f_{N-1}]^T$ como o vetor $\hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}_0 \quad \cdots \quad \hat{f}_{N-1}]$ com as componentes

(18)
$$\hat{f}_n = Nc_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-inx_k}, \qquad f_k = f(x_k), \quad n = 0, \cdots, N - 1.$$

Este é o espectro de freqüências do sinal.

Em notação vetorial, $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{F}_N \mathbf{f}$, onde a **matriz de Fourier** $N \times N$ $\mathbf{F}_N = [e_{nk}]$ tem os elementos [dados em (18)]

(19)
$$e_{nk} = e^{-inx_k} = e^{-2\pi ink/N} = w^{nk}, \qquad w = w_N = e^{-2\pi i/N},$$

onde $n, k = 0, \cdots, N - 1$.

EXEMPLO 4 Transformada Discreta de Fourier (TDF). Amostra de $N = 4$ Valores

Consideremos que sejam tomadas $N = 4$ medidas (valores amostrais). Então, $w = e^{-2\pi i/N} = e^{-\pi i/2} = -i$ e, portanto $w^{nk} = (-i)^{nk}$. Consideremos também que os valores das amostras sejam, digamos, $\mathbf{f} = [0\ 1\ 4\ 9]^T$. Então, por (18) e (19),

(20)
$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{F}_4 \mathbf{f} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 + 8i \\ -6 \\ -4 - 8i \end{bmatrix}.$$

Da primeira matriz em (20), fica fácil inferir qual será a aparência de $\mathbf{F}_N$ para um N arbitrário, que na prática pode valer 1000 ou mais, pelas razões dadas a seguir. ■

Da TDF (o espectro de freqüências) $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{F}_N \mathbf{f}$, podemos restituir o sinal dado $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{F}_N^{-1} \mathbf{f}$, conforme provaremos agora. Aqui, $\mathbf{F}_N$ e seu conjugado complexo $\overline{\mathbf{F}}_N = \frac{1}{N} [\overline{w}^{nk}]$ satisfazem a

(21a)
$$\overline{\mathbf{F}}_N \mathbf{F}_N = \mathbf{F}_N \overline{\mathbf{F}}_N = N\mathbf{I}$$

onde $\mathbf{I}$ é matriz unitária $N \times N$; logo, $\mathbf{F}_N$ possui a inversa

(21b)
$$\mathbf{F}_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{F}}_N.$$

PROVA Provemos (21). Pela regra da multiplicação (linha vezes coluna) a matriz do produto $\mathbf{G}_N = \overline{\mathbf{F}}_N \mathbf{F}_N = [g_{jk}]$ em (21a) tem os elementos $g_{jk} =$ *Linha* j de $\overline{\mathbf{F}}_N$ vezes *Coluna* k de $\mathbf{F}_N$. Ou seja, escrevendo $W = \overline{w}^j w^k$, provamos que

$$g_{jk} = (\overline{w}^j w^k)^0 + (\overline{w}^j w^k)^1 + \cdots + (\overline{w}^j w^k)^{N-1}$$

$$= W^0 + W^1 + \cdots + W^{N-1} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad j \neq k \\ N & \text{se} \quad j = k. \end{cases}$$

De fato, quando $j = k$, então $\overline{w}^k w^k = (\overline{w}w)^k = (e^{2\pi i/N}\, e^{-2\pi i/N})^k = 1^k = 1$, de modo que a soma *destes N* termos é igual a N; estes são os elementos da diagonal de $\mathbf{G}_N$. Além disso, quando $j \neq k$, então $W \neq 1$ e temos uma soma geométrica (cujo valor é dado por (6) da Seção 15.1 com $q = W$ e $n = N - 1$)

$$W^0 + W^1 + \cdots + W^{N-1} = \frac{1 - W^N}{1 - W} = 0$$

porque $W^N = (\overline{w}^j w^k)^N = (e^{2\pi i})^j (e^{-2\pi i})^k = 1^j \cdot 1^k = 1$. ■

Vimos que $\hat{\mathbf{f}}$ é o espectro de freqüências do sinal de $f(x)$. Portanto, as componentes $\hat{f}_n$ de $\hat{\mathbf{f}}$ fornecem uma resolução da função $f(x)$ de período 2π na forma de harmônicos simples (complexos). Aqui, deve-se usar somente os $n's$ que são muito menores que $N/2$, a fim de evitar a **falsa freqüência** (***aliasing***), nome dado ao efeito que resulta quando tiramos amostras de um pequeno número de pontos (igualmente espaçados), de modo que, por exemplo, num filme, rodas girando dão a impressão de estar fazendo uma rotação muito lenta ou mesmo no sentido contrário. Dessa forma, nas aplicações, N é geralmente grande. Entretanto, isto nos traz um problema. A Equação (18) requer $O(N)$ operações para qualquer n particular; logo, requer $O(N^2)$ operações para, digamos, todo $n < N/2$. Portanto, já na casa de 1000 pontos amostrais, o cálculo direto envolveria milhões de operações. Entretanto, essa dificuldade pode ser superada pelo uso da chamada **transformada rápida de Fourier (TRF)**, para a qual existem códigos prontamente disponíveis (p. ex., no Maple). A TRF é um método computacional para a TDF que precisa somente de $O(N) \log_2 N$ operações, em vez de $O(N^2)$. Ela faz com que a TDF passe a ser uma ferramenta prática para grandes valores de N. Aqui, escolhe-se $N = 2^p$ (p inteiro) e usa-se a forma especial da matriz de Fourier para decompor o problema dado em problemas menores. Por exemplo, quando $N = 1000$, essas operações se reduzem por um fator de $1000/\log_2 1000 \approx 100$.

A decomposição resulta em dois problemas de tamanho $M = N/2$, e ela é possível porque, para $N = 2M$, temos em (19),

$$w_N^2 = w_{2M}^2 = (e^{-2\pi i/N})^2 = e^{-4\pi i/(2M)} = e^{-2\pi i/M} = w_M.$$

O vetor dado $\mathbf{f} = [f_0 \quad \cdots \quad f_{N-1}]^\mathsf{T}$ é dividido em dois vetores com M componentes cada, a saber, $\mathbf{f}_{\text{par}} = [f_0 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_{N-2}]^\mathsf{T}$ contendo as componentes pares de $\mathbf{f}$, e $\mathbf{f}_{\text{ímpar}} = [f_1 \quad f_3 \quad \cdots \quad f_{N-1}]^\mathsf{T}$ contendo as componentes ímpares de $\mathbf{f}$. Para $\mathbf{f}_{\text{par}}$ e $\mathbf{f}_{\text{ímpar}}$, determinamos as TDFs

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{par}} = \left[\hat{f}_{\text{par},0} \quad \hat{f}_{\text{par},2} \quad \cdots \quad \hat{f}_{\text{par},\,N-2}\right]^\mathsf{T} = \mathbf{F}_M \mathbf{f}_{\text{par}}$$

e

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{ímpar}} = \left[\hat{f}_{\text{ímpar},1} \quad \hat{f}_{\text{ímpar},3} \quad \cdots \quad \hat{f}_{\text{ímpar},\,N-1}\right]^\mathsf{T} = \mathbf{F}_M \mathbf{f}_{\text{ímpar}}$$

envolvendo a mesma matriz $M \times M$ $\mathbf{F}_M$. Desses vetores, obtemos as componentes da TDF do vetor dado $\mathbf{f}$ através das fórmulas

$$\text{(22)} \qquad \text{(a)} \quad \hat{f}_n = \hat{f}_{\text{par},n} + w_N^n \hat{f}_{\text{ímpar},n} \qquad n = 0, \cdots, M - 1$$

$$\text{(b)} \quad \hat{f}_{n+M} = \hat{f}_{\text{par},n} - w_N^n \hat{f}_{\text{ímpar},n} \qquad n = 0, \cdots, M - 1.$$

Para $N = 2^p$, essa decomposição pode ser repetida $p - 1$ vezes para se chegar a $N/2$ problemas de tamanho 2 cada, de modo que o número de multiplicações se reduz conforme o indicado anteriormente.

Mostremos agora a redução de $N = 4$ para $M = N/2 = 2$ e então provemos (22).

EXEMPLO 5 Transformada Rápida de Fourier (TRF). Amostra de $N = 4$ Valores

Quando $N = 4$, então $w = w_N = -i$ como no Exemplo 4 e $M = N/2 = 2$; logo, $w = w_M = e^{-2\pi i/2} = e^{-\pi i} = -1$. Conseqüentemente,

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{par}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_2 \mathbf{f}_{\text{par}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_2 \\ f_0 - f_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{ímpar}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_2 \mathbf{f}_{\text{ímpar}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + f_3 \\ f_1 - f_3 \end{bmatrix}.$$

Disto e de (22a), obtemos

$$\hat{f}_0 = \hat{f}_{\text{par},0} + w_N^0 \hat{f}_{\text{ímpar},0} = (f_0 + f_2) + (f_1 + f_3) = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$$

$$\hat{f}_1 = \hat{f}_{\text{par},1} + w_N^1 \hat{f}_{\text{ímpar},1} = (f_0 - f_2) - i(f_1 + f_3) = f_0 - if_1 - f_2 + if_3.$$

Similarmente, para (22b),

$$\hat{f}_2 = \hat{f}_{\text{par},0} - w_N{}^0\hat{f}_{\text{ímpar},0} = (f_0 + f_2) - (f_1 + f_3) \quad = f_0 - f_1 + f_2 - f_3$$

$$\hat{f}_3 = \hat{f}_{\text{par},1} - w_N{}^1\hat{f}_{\text{ímpar},1} = (f_0 - f_2) - (-i)(f_1 - f_3) = f_0 + if_1 - f_2 - if_3.$$

Isto concorda com o Exemplo 4, como podemos ver substituindo f_0, f_1, f_2, f_3 por 0, 1, 4, 9. ■

Provemos (22). De (18) e (19), temos, para as componentes da TRF,

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{kn} f_k.$$

Dividindo isto em duas somas de $M = N/2$ termos cada, obtemos

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{M-1} w_N^{2kn} f_{2k} + \sum_{k=0}^{M-1} w_N^{(2k+1)n} f_{2k+1}.$$

Agora fazemos $w_N{}^2 = w_M$ e retiramos $w_N{}^n$ da segunda soma, obtendo

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{M-1} w_M^{kn} f_{\text{par},k} + w_N{}^n \sum_{k=0}^{M-1} w_M^{kn} f_{\text{ímpar},k}. \tag{23}$$

As duas somas são $f_{\text{par},n}$ e $f_{\text{ímpar},n}$, as componentes das "meias" transformadas $\mathbf{Ff}_{\text{par}}$ e $\mathbf{Ff}_{\text{ímpar}}$.

A fórmula (22a) é a mesma que (23). Em (22b), temos $n + M$ ao invés de n. Isso provoca uma mudança de sinal em (23), a saber, $-w_N{}^n$ antes da segunda soma, pois

$$w_N{}^M = e^{-2\pi iM/N} = e^{-2\pi i/2} = e^{-\pi i} = -1.$$

Isto faz surgir o sinal negativo em (22b) e completa a prova. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 11.9

1. (Revisão) Mostre que $1/i = -i$, $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$, $e^{ix} - e^{-ix} = 2i$ sen x

2–9 TRANSFORMADAS DE FOURIER POR INTEGRAÇÃO

Encontre a transformada de Fourier de $f(x)$ (sem usar a Tabela III da Seção 11.10). Mostre os detalhes.

2. $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{se } x < 0 \quad (k > 0) \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 < x < b \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} k & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$

OUTROS MÉTODOS

10. Encontre a transformada de Fourier de $f(x) = xe^{-x}$ se $x > 0$ e 0 se $x < 0$ a partir da fórmula 5 na Tabela III e de (9) no texto. *Sugestão*: considere xe^{-x} e e^{-x}.

11. Obtenha $\mathcal{F}(e^{-x^2/2})$ a partir da fórmula 9 na Tabela III.

12. Obtenha a fórmula 7 a partir da fórmula 8 na Tabela III.

13. Obtenha a fórmula 1 a partir da fórmula 2 na Tabela III.

14. PROJETO DE EQUIPE. Deslocamento. (a) Mostre que, se $f(x)$ possui uma transformada de Fourier, o mesmo ocorre com $f(x - a)$ e com $\mathcal{F}\{f(x - a)\} = e^{-iwa}\mathcal{F}\{f(x)\}$.

(b) Usando (a), obtenha a fórmula 1 a partir da fórmula 2 na Tabela III da Seção 11.10.

(c) Deslocamento sobre o eixo *w*. Mostre que, se $\hat{f}(w)$ é a transformada de Fourier de $f(x)$, então $\hat{f}(w - a)$ é a transformada de Fourier de $e^{iax}f(x)$.

(d) Usando (c), obtenha a fórmula 7 a partir da fórmula 1 e a fórmula 8 a partir da fórmula 2 na Tabela III.

11.10 Tabelas de Transformadas

Tabela I. Transformadas de Fourier de Cossenos

Veja (2) na Seção 11.8.

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = \mathcal{F}_c(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\operatorname{sen} aw}{w}$
2	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos\frac{a\pi}{2}$ ($\Gamma(a)$ veja o Apêndice A3.1.)
3	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \left(\frac{a}{a^2 + w^2}\right)$
4	$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
5	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\ e^{-w^2/(4a)}$
6	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Re}(a + iw)^{n+1}$ Re = Parte Real
7	$\begin{cases} \cos x & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \left[\frac{\operatorname{sen} a(1 - w)}{1 - w} + \frac{\operatorname{sen} a(1 + w)}{1 + w}\right]$
8	$\cos(ax^2) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\ \cos\left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
9	$\operatorname{sen}(ax^2) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\ \cos\left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
10	$\frac{\operatorname{sen} ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ (1 - u(w - a))$ (Veja a Seção 6.3.)
11	$\frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \arctan\frac{2}{w^2}$
12	$J_0(ax) \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{a^2 - w^2}}\ (1 - u(w - a))$ (Veja as Seções 5.5, 6.3.)

Tabela II. Transformadas de Fourier de Senos

Veja (5) na Seção 11.8.

	$f(x)$	$\hat{f}_s(w) = \mathcal{F}_s(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right]$
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$
4	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \operatorname{sen} \frac{a\pi}{2}$ ($\Gamma(a)$, veja o Apêndice A3.1.)
5	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w}{a^2 + w^2} \right)$
6	$\frac{e^{-ax}}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctan \frac{w}{a}$
7	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Im} (a + iw)^{n+1}$ Im = Parte imaginária
8	$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$
9	$xe^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}} e^{-w^2/4a}$
10	$\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\operatorname{sen} a(1 - w)}{1 - w} - \frac{\operatorname{sen} a(1 + w)}{1 + w} \right]$
11	$\frac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(w - a)$ (Veja a Seção 6.3.)
12	$\arctan \frac{2a}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\operatorname{senh} aw}{w} e^{-aw}$

Tabela III. Transformadas de Fourier

Veja (6) na Seção 11.9.

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{se } -b < x < b \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\operatorname{sen} bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{se } b < x < c \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{e^{-a\lvert w\rvert}}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{se } 0 < x < b \\ 2x - b & \text{se } b < x < 2b \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{-2ibw}}{\sqrt{2\pi}\, w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{se } b < x < c \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iax} & \text{se } -b < x < b \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\operatorname{sen} b(w - a)}{w - a}$
8	$\begin{cases} e^{iax} & \text{se } b < x < c \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a - w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\ e^{-w^2/4a}$
10	$\frac{\operatorname{sen} ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{se } \lvert w\rvert < a;\ \ 0 \text{ se } \lvert w\rvert > a$

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 11

1. O que é uma série de Fourier? Uma série de Fourier de senos? Uma expansão de meia-escala?
2. Uma função descontínua pode ter uma série de Fourier? Pode ter uma série de Taylor? Explique.
3. Por que começamos com o período 2π? Como fizemos para tratar de funções de período p qualquer?
4. O que é o sistema trigonométrico? Qual é a sua principal propriedade, pela qual obtivemos as fórmulas de Euler?
5. O que você sabe sobre a convergência de uma série de Fourier?
6. O que é o fenômeno de Gibbs?
7. O que é a aproximação por polinômios trigonométricos? E o erro quadrado mínimo?
8. O que há de notável a respeito da resposta de um sistema vibratório a uma força periódica *arbitrária*?
9. O que você sabe sobre a integral de Fourier? E sobre suas aplicações?

10. O que é a transformada de Fourier de senos? Dê exemplos.

11–20 SÉRIES DE FOURIER

Encontre a série de Fourier de $f(x)$ conforme dada para um período. Esboce $f(x)$. (Mostre os detalhes do que fizer.)

11. $f(x) = \begin{cases} -k & \text{se } -1 < x < 0 \\ k & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{se } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

13. $f(x) = x \quad (-2\pi < x < 2\pi)$

14. $f(x) = |x| \quad (-2 < x < 2$

15. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 - x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$

17. $f(x) = |\text{sen } 8\pi x| \ (-1/8 < x < 1/8)$

18. $f(x) = e^x \ (-\pi < x < \pi)$

19. $f(x) = x^2 \ (-\pi/2 < x < \pi/2)$

20. $f(x) = x \ (0 < x < 2\pi)$

21–23 Usando as respostas dos problemas ímpares adequados, encontre a soma de

21. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$

22. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots$

23. $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots$

24. (Identidade de Parseval) Obtenha o resultado do Problema 23 aplicando a identidade de Parseval ao Problema 12.

25. Quanto vale a soma dos termos dos cossenos e a soma dos termos dos senos numa série de Fourier cuja soma é $f(x)$? Dê dois exemplos.

26. (Expansão de meia-escala) Encontre a série do seno de meia-escala de $f(x) = 0$ se $0 < x < \pi/2$, $f(x) = 1$ se $\pi/2 < x < \pi$. Compare com o Problema 12.

27. (Série de meia-escala de cossenos) Encontre a série do cosseno de meia-escala de $f(x) = x$ $(0 < x < 2\pi)$. Compare com o Problema 20.

28–29 ERRO QUADRADO MÍNIMO

Compute os erros quadrados mínimos para os polinômios trigonométricos de grau $N = 1, \cdots, 8$:

28. Para $f(x)$ no Prob. 12.

29. Para $f(x) = x \ (-\pi < x < \pi)$.

30–31 SOLUÇÃO GERAL

Resolva $y'' + \omega^2 y = r(t)$, onde $|\omega| \neq 0, 1, 2, \cdots$, $r(t)$ tem o período 2π e:

30. $r(t) = t(\pi^2 - t^2) \quad (-\pi < t < \pi)$

31. $r(t) = t^2 \quad (-\pi < t < \pi)$

32–37 INTEGRAIS E TRANSFORMADAS DE FOURIER

Esboce a função dada e represente-a conforme o indicado. Se você dispõe de um programa de computador, faça um gráfico aproximado das curvas obtidas pela substituição de ∞ por limites finitos; procure também pela ocorrência de fenômenos de Gibbs.

32. $f(x) = 1$ se $1 < x < 2$ e 0 nos demais casos, por uma integral de Fourier

33. $f(x) = x$ se $0 < x < 1$ nos demais casos, por uma integral de Fourier

34. $f(x) = 1 + x/2$ se $-2 < x < 0$, $f(x) = 1 - x/2$ se $0 < x < 2$, $f(x) = 0$ nos demais casos, por uma integral de Fourier de cossenos

35. $f(x) = -1 - x/2$ se $-2 < x < 0$, $f(x) = 1 - x/2$ se $0 < x < 2$, $f(x) = 0$ nos demais casos, por uma integral de Fourier de senos

36. $f(x) = -4 + x^2$ se $-2 < x < 0$, $f(x) = 4 - x^2$ se $0 < x < 2$, $f(x) = 0$ nos demais casos, por uma integral de Fourier de senos

37. $f(x) = 4 - x^2$ se $-2 < x < 2$, $f(x) = 0$ nos demais casos, por uma integral de Fourier de cossenos

38. Encontre a transformada de Fourier de $f(x) = k$ se $a < x < b$, $f(x) = 0$ nos demais casos.

39. Encontre a transformada de Fourier de cossenos $f(x) = e^{-2x}$ se $x > 0$, $f(x) = 0$ se $x < 0$.

40. Encontre $\mathcal{F}_c(e^{-2x})$ e $\mathcal{F}_s(e^{-2x})$ pelas fórmulas envolvendo derivadas segundas.

RESUMO DO CAPÍTULO 11

Séries, Integrais e Transformadas de Fourier

As **séries de Fourier** relacionam-se às **funções periódicas** $f(x)$ de período $p = 2L$, ou seja, às funções que, por definição, satisfazem a $f(x + p) = f(x)$ para todo x e para algum valor fixo de $p > 0$; portanto, $f(x + np) = f(x)$ para qualquer inteiro n. Essas séries têm a forma

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right) \qquad \text{(Seção 11.2)}$$

com os coeficientes, chamados de **coeficientes de Fourier** de $f(x)$, dados pelas fórmulas de Euler (Seção 11.2)

(2)
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

onde $n = 1, 2, \cdots$ Para o período 2π, simplesmente temos (Seção 11.1)

(1*)
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \,\text{sen}\, nx)$$

com os *coeficientes de Fourier* de $f(x)$ (Seção 11.1)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, nx\,dx.$$

As séries de Fourier têm uma importância fundamental no tratamento de fenômenos periódicos, particularmente nos modelos envolvendo equações diferenciais (Seção 11.5 e Capítulo 12). Se a função $f(x)$ for par [$f(-x) = f(x)$] ou ímpar [$f(-x) = -f(x)$], elas se reduzem às **séries de Fourier de cossenos** ou às **séries de Fourier de senos**, respectivamente (Seção 11.3). Se a função $f(x)$ for dada somente para $0 \leqq x \leqq L$, ela possui **expansões de meia-escala** de período $2L$, a saber, uma série de cossenos e uma outra de senos (Seção 11.3).

O conjunto das funções de cosseno e seno em (1) é chamado de **sistema trigonométrico**. Sua propriedade mais fundamental é sua **ortogonalidade** em um intervalo do comprimento $2L$; isto é, para todos os inteiros m e $n \neq m$, temos que

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \qquad \int_{-L}^{L} \text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

e para todos os inteiros m e n,

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0.$$

Essa ortogonalidade foi essencial na obtenção das fórmulas de Euler (2).

As somas parciais das séries de Fourier minimizam o **erro quadrado** (Seção 11.6).

É possível estender as idéias e técnicas das séries Fourier para funções não-periódicas $f(x)$ definidas sobre a reta dos números reais; isso nos leva à **integral de Fourier**

(3)
$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos wx + B(w)\,\text{sen}\, wx]\,dw \qquad \text{(Seção 11.7)}$$

onde

(4)
$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\text{sen}\, wv\,dv$$

ou, em forma complexa (Seção 11.9),

(5)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}\,dw \qquad (i = \sqrt{-1})$$

onde

(6)
$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx.$$

A fórmula (6) transforma $f(x)$ em sua **transformada de Fourier** $\hat{f}(w)$ e (5) é a transformada inversa.

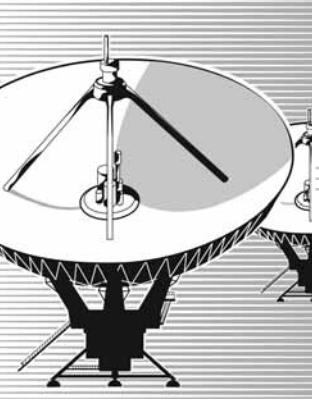
Relacionam-se a isso a **transformada de Fourier de cossenos** (Seção 11.8)

(7)
$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx$$

e a **transformada de Fourier de senos** (Seção 11.8)

(8)
$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\,\text{sen}\, wx\,dx.$$

A **transformada discreta de Fourier (TDF)** e um método prático de calculá-la, chamado de **transformada rápida de Fourier (TRF)**, são discutidos na Seção 11.9.



CAPÍTULO 12

Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

As EDPs modelam diversos problemas geométricos e físicos, que surgem quando as funções desconhecidas (as soluções) dependem de duas ou mais variáveis, geralmente do tempo t e de uma ou diversas variáveis espaciais. É justo dizer que apenas os modelos físicos mais simples podem ser modelados por EDOs, ao passo que a maioria dos problemas em dinâmica, elasticidade, transferência de calor, teoria eletromagnética e mecânica quântica requerem EDPs. Com efeito, a gama de aplicações das EDPs é enorme, comparada à das EDOs.

Neste capítulo, concentrar-nos-emos nas EDPs mais importantes da matemática aplicada, a saber, as equações da onda regulando a corda vibrante (Seção 12.2) e a membrana vibrante (Seção 12.7), a equação do calor (Seção 12.5) e a equação de Laplace (Seções 12.5 e 12.10). Deduziremos essas EDPs da física e consideraremos métodos de resolução de **problemas de valor inicial e de condição de contorno**, isto é, métodos de obtenção de soluções que satisfaçam às condições dadas pela situação física.

Nas Seções 12.6 e 12.11, mostraremos que as EDPs podem também ser resolvidas pelos métodos das transformadas de Fourier e Laplace.

COMENTÁRIO. Os métodos numéricos para as EDPs serão explicados nas Seções 21.4-21.7

Pré-requisitos: EDOs lineares (Capítulo 2), séries de Fourier (Capítulo 11)
Seções que podem ser omitidas em cursos mais curtos: 12.6, 12.9–12.11
Referências e Respostas dos Exercícios: Parte C do Apêndice 1 e Apêndice 2.

12.1 Conceitos Básicos

Uma **equação diferencial parcial (EDP)** é uma equação envolvendo uma ou mais derivadas parciais de uma função (desconhecida), que chamaremos de u e que depende de duas ou mais variáveis, freqüentemente o tempo t e uma ou várias variáveis espaciais. A ordem da derivada mais alta é chamada de **ordem** da EDP. Como acontece com as EDOs, as EDPs de segunda ordem são as mais importantes nas aplicações.

Tal como ocorre com as equações diferenciais ordinárias (EDOs), dizemos que uma EDP é **linear** se ela é do primeiro grau na função desconhecida u e em suas derivadas parciais. Caso contrário, ela é chamada de **não-linear**. Portanto, todas as equações do Exemplo 1 a seguir são lineares. Chamamos uma EDP *linear* de **homogênea** se cada um de seus termos contém u ou uma de suas derivadas parciais. De outro modo, dizemos que a equação é **não-homogênea**. Portanto, no Exemplo 1, (4) (com f não identicamente nula) é não-homogênea, ao passo que as demais equações são homogêneas.

EXEMPLO 1 Importantes EDPs de Segunda Ordem

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ ***Equação da onda unidimensional***

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ ***Equação do calor unidimensional***

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ ***Equação de Laplace bidimensional***

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ ***Equação de Poisson bidimensional***

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$ ***Equação da onda bidimensional***

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ ***Equação de Laplace tridimensional***

Aqui, c é uma constante positiva, t é o tempo, x, y, z são coordenadas cartesianas e *dimensão* é o número dessas coordenadas na equação. ■

Uma **solução** de uma EDP em alguma região R do espaço das variáveis independentes é uma função que tem todas as suas derivadas parciais aparecendo na EDP em algum domínio D (definição na Seção 9.6) contendo R e que satisfaz à EDP em qualquer ponto de R.

Freqüentemente, apenas se exige que a função seja contínua no contorno de R, que ela tenha no interior de R as derivadas mencionadas e que satisfaça à EDP no interior de R. Situar R em D é um procedimento que simplifica a situação em relação às derivadas no contorno de R, de modo que o que ocorre no contorno é o mesmo que ocorre no interior de R.

Em geral, a totalidade das soluções de uma EDP é muito grande. Por exemplo, as funções

(7) $$u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \operatorname{sen} x \cosh y, \quad u = \ln(x^2 + y^2)$$

que são inteiramente diferentes umas das outras, são soluções de (3), como se pode verificar. Veremos mais tarde que a única solução de uma EDP correspondente a um dado problema físico será obtida pelo uso de **condições adicionais** que surgem do problema. Por exemplo, a condição impondo que a solução u assuma valores dados no contorno da região R ("**condições de contorno**"). Ou, quando o tempo t é uma das variáveis, que u (ou $u_t = \delta u/\delta t$ ou ambas) possa(m) ser determinada(s) em $t = 0$ ("**condições iniciais**").

Sabemos que, se uma EDO é linear e homogênea, então, a partir de soluções conhecidas, podemos obter outras soluções por superposição. Para as EDPs, a situação é bastante similar:

TEOREMA 1

Teorema Fundamental da Superposição

*Se u_1 e u_2 são soluções de uma EDP **linear homogênea** em alguma região R, então*

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

com as constantes c_1 e c_2 quaisquer, é também uma solução dessa EDP na região R.

A prova simples deste importante teorema é bastante similar àquela do Teorema 1 da Seção 2.1 e é deixada ao estudante.

A verificação de soluções de EDPs nos Problemas 14–25 é obtida do mesmo modo usado nas EDOs. Os Problemas 1–12 tratam de EDPs solucionáveis como as EDOs. Para ajudar o estudante a resolvê-los, daremos dois exemplos típicos.

EXEMPLO 2 **Resolvendo $u_{xx} - u = 0$ como uma EDO**

Encontre soluções u da EDP $u_{xx} - u = 0$ dependentes de x e y.

Solução. Como não ocorrem derivadas em y, podemos resolver esta EDP como $u'' - u = 0$. Na Seção 2.2, teríamos obtido $u = Ae^x + Be^{-x}$ com A e B constantes. Aqui, A e B podem ser funções de y, de modo que a resposta é

$$u(x, y) = A(y)e^x + B(y)e^{-x}$$

com funções arbitrárias de A e B. Temos, portanto, uma grande variedade de soluções. Confira o resultado por derivação. ■

EXEMPLO 3 **Resolvendo $u_{xy} = -u_x$ como uma EDP**

Encontre soluções $u = u(x, y)$ desta EDP.

Solução. Fazendo $u_x = p$, nós temos $p_y = -p$, $p_y/p = -1$, $\ln p = -y + \tilde{c}(x)$, $p = c(x)e^{-y}$ e, por integração em relação a x,

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y) \qquad \text{onde} \qquad f(x) = \int c(x)\, dx;$$

aqui, $f(x)$ e $g(y)$ são arbitrárias. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.1

1–12 EDPs RESOLVÍVEIS COMO EDOs

Isto ocorre quando uma EDP envolve derivadas em relação a somente uma variável (ou quando é possível passar a EDP para essa forma) de modo que a(s) outra(s) variável(is) pode(m) ser tratada(s) como parâmetro(s). Resolva para $u = u(x, y)$:

1. $u_{yy} + 16u = 0$

2. $u_{xx} = u$

3. $u_{yy} = 0$
4. $u_y + 2yu = 0$
5. $u_y + u = e^{xy}$
6. $u_{xx} = 4y^2u$
7. $u_y = (\cosh x)yu$
8. $u_y = 2xyu$
9. $y^2u_{yy} + 2yu_y - 2u = 0$
10. $u_{yy} = 4xu_y$
11. $u_{xy} = u_x$
12. $u_{yy} + 10u_y + 25u = e^{-5y}$
13. (**Teorema Fundamental**) Prove o Teorema Fundamental 1 para EDPs de segunda ordem com duas e três variáveis independentes.

14–25 VERIFICAÇÃO DE SOLUÇÕES

Verifique (por substituição) que a função dada é uma solução da EDP indicada. Esboce ou faça um gráfico da solução como uma superfície no espaço.

14–17 **Equação da Onda (1)** com um c apropriado

14. $u = 4x^2 + t^2$
15. $u = \text{sen } 8x \cos 2t$
16. $u = \text{sen } 3x \text{ sen } 18t$
17. $u = \text{sen } kx \cos kct$

18–21 **Equação do Calor (2)** com um c apropriado

18. $u = e^{-2kt} \cos 8x$
19. $u = e^{-\pi^2 t} \text{ sen } 4x$
20. $u = e^{-4\omega^2 t} \text{ sen } \omega x$
21. $u = e^{-\omega^2 c^2 t} \cos \omega x$

22–25 **Equação de Laplace (3)**

22. u em (7) no texto
23. $u = \cos 2y \text{ senh } 2x$
24. $u = \arctan (y/x)$
25. $u = e^{x^2 - y^2} \text{ sen } 2xy$

26. PROJETO DE EQUIPE. Verificação de Soluções

(**a**) **Equação da onda.** Verifique que (1) é satisfeita por $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$ com v e w sendo duas funções quaisquer duas vezes deriváveis.

(**b**) **Equação de Poisson.** Verifique que cada u satisfaz (4) com $f(x,y)$ conforme o indicado

$u = x^4 + y^4$	$f = 12(x^2 + y^2)$
$u = \cos x \text{ sen } y$	$f = -2 \cos x \text{ sen } y$
$u = y/x$	$f = 2y/x^3$

(**c**) **Equação de Laplace.** Verifique que $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ satisfaz (6) e que $u = \ln (x^2 + y^2)$ satisfaz (3). Será $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ uma solução de (3)? De qual equação de Poisson?

(**d**) Verifique que u satisfaz a EDP dada com v e w quaisquer (desde que deriváveis o número suficiente de vezes).

$u = v(x) + w(y)$	$u_{xy} = 0$
$u = v(x)w(y)$	$uu_{xy} = u_xu_y$
$u = v(x + 3t) + w(x - 3t)$	$u_{tt} = 9u_{xx}$

27. (**Problema de valor de contorno**) Verifique que a função $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ satisfaz a equação de Laplace (3) e determine a e b de modo que u satisfaça as condições de contorno $u = 110$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e $u = 0$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 100$

28–30 SISTEMAS DE EDPs

Resolva

28. $u_x = 0, u_y = 0$
29. $u_{xx} = 0, u_{xy} = 0$
30. $u_{xx} = 0, u_{yy} = 0$

12.2 Modelagem: Corda Vibrante, Equação da Onda

Como uma primeira e importante EDP, determinaremos a equação que rege as pequenas vibrações transversais de uma corda elástica, como uma corda de violino. Consideremos a corda situada ao longo do eixo x, esticada com um comprimento L e fixada nas extremidades $x = 0$ e $x = L$. Então, estendemos a corda e, num instante qualquer, que chamaremos de $t = 0$, nós a soltamos, deixando-a vibrar. O problema consiste em determinar as vibrações da corda, ou seja, achar sua deflexão $u(x, t)$ em um ponto x e em qualquer instante $t > 0$; veja a Fig. 283.

$u(x, t)$ será a solução de uma EDP que modela o sistema físico por nós modelado. Essa EDP não será complicada demais, de modo que podemos resolvê-la. Seguem-se algumas suposições razoáveis de simplificação (como havia nos modelos vibratórios para as EDOs no Capítulo 2).

Suposições Físicas

1. A massa da corda por unidade de comprimento é constante ("corda homogênea"). A corda é perfeitamente elástica e não oferece resistência à deflexão.
2. A tensão causada pelo esticamento da corda, presa pelas suas extremidades, é tão grande que a ação da força gravitacional na corda (que tenta puxá-la um pouco para baixo) pode ser desprezada.
3. A corda executa pequenos movimentos transversais num plano vertical, isto é, cada partícula da corda move-se de modo estritamente vertical, de modo que a deflexão e a inclinação em cada ponto da corda sempre permanecerão pequenas em valores absolutos.

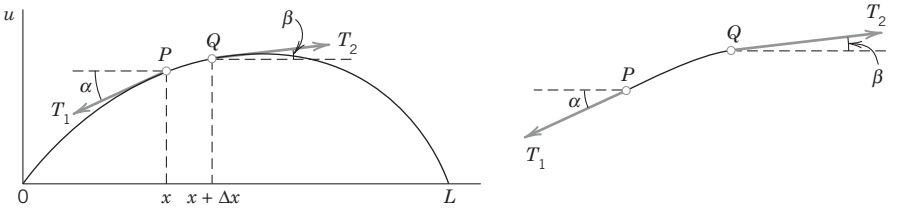


Fig. 283. Corda defletida num dado instante t. Explicações a seguir

Sob essas suposições, podemos esperar soluções $u(x, t)$ que descrevam a realidade física suficientemente bem.

Obtenção da EDP do Modelo ("Equação da Onda") a Partir das Forças

O modelo da corda vibrante consistirá em uma EDP ("Equação da Onda") e das condições adicionais. Para obtermos a EDP, consideraremos as ***forças atuando numa pequena porção da corda*** (Fig. 283). Este método é típico da modelagem em mecânica e também em outras áreas de estudo.

Como a corda não oferece resistência à deflexão, a tensão é tangencial à curva apresentada pela corda em cada ponto. Sejam T_1 e T_2 as tensões nas extremidades P e Q dessa porção. Uma vez que os pontos da corda movem-se verticalmente, não há movimento na direção horizontal. Logo, as componentes horizontais da tensão devem ser constantes. Usando a notação mostrada na Fig. 283, obtemos então:

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = const. \tag{1}$$

Na direção vertical temos duas forças, a saber, as componentes verticais $-T_1 \operatorname{sen} \alpha$ e $T_2 \operatorname{sen} \beta$ de T_1 e T_2; o sinal negativo aparece aqui porque a componente em P está voltada para baixo. Pela **segunda lei de Newton**, a resultante dessas duas forças é igual à massa $\rho \Delta x$ da porção multiplicada pela aceleração $\delta^2 u/\delta t^2$, calculada em algum ponto entre x e $x + \Delta x$; aqui, ρ é a massa por unidade de comprimento da corda não defletida e Δx é o comprimento desta porção. (Δ é geralmente usado para denotar pequenas quantidades, e nada tem a ver com o laplaciano ∇^2, que algumas vezes é também denotado por Δ.) Assim:

$$T_2 \operatorname{sen} \beta - T_1 \operatorname{sen} \alpha = \rho \, \Delta x \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

Usando (1), podemos dividi-la por $T_2 \cos \beta = T_1 \cos \alpha = T$, obtendo:

$$\frac{T_2 \operatorname{sen} \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \operatorname{sen} \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \, \Delta x}{T} \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{2}$$

Agora, $\tan \alpha$ e $\tan \beta$ são as inclinações da corda em x e $x + \Delta x$:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_x \qquad \text{e} \qquad \tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x} .$$

Aqui, temos que escrever derivadas *parciais*, pois u depende também do tempo t. Dividindo (2) por Δx, obtemos, portanto:

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_x \right] = \frac{\rho}{T} \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

Se fizermos Δx aproximar-se de zero, obtemos a EDP linear:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \qquad c^2 = \frac{T}{\rho} . \tag{3}$$

Esta é a chamada **equação da onda unidimensional**. Vemos que ela é homogênea e de segunda ordem. A constante física T/ρ é representada por c^2 (no lugar de c) para indicar que esta constante é *positiva*, um fato que será essencial para a forma das soluções. "Unidimensional" quer dizer que a equação envolve somente uma variável espacial, x. Na próxima seção, completaremos o estabelecimento do modelo e então mostraremos como resolvê-lo usando um método geral que, provavelmente, é o mais importante para as EDPs na matemática para engenharia.

12.3 Solução por Separação de Variáveis. Uso da Série de Fourier

O modelo da corda elástica vibrante (uma corda de violino, por exemplo) consiste na **equação da onda unidimensional**

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

para a deflexão desconhecida $u(x, t)$ da corda, uma EDP que acabamos de obter, e algumas ***condições adicionais*** que iremos agora deduzir.

Como a corda está presa nas extremidades $x = 0$ e $x = L$ (Seção 12.2), temos duas **condições de contorno:**

(2) $$\text{(a)} \quad u(0, t) = 0, \qquad \text{(b)} \quad u(L, t) = 0 \qquad \text{para todo } t.$$

Além disto, a forma do movimento da corda dependerá de sua *deflexão inicial* (deflexão no tempo $t = 0$), que chamaremos de $f(x)$, e de sua *velocidade inicial* (velocidade em $t = 0$), que chamaremos de $g(x)$. Temos assim as duas **condições iniciais**

(3) $$\text{(a)} \quad u(x, 0) = f(x), \qquad \text{(b)} \quad u_t(x, 0) = g(x) \qquad (0 \leqq x \leqq L)$$

onde $u_t = \delta u/\delta t$. Temos agora que achar uma solução para a EDP(1) que satisfaça as condições (2) e (3). Esta será a solução do nosso problema. Faremos isto em três passos como se segue.

Passo 1. Pelo **"método da separação de variáveis"** ou *método do produto*, fazendo $u(x, t) = F(x)G(t)$, obtemos de (1) duas EDOs: uma para $F(x)$ e outra para $G(t)$.
Passo 2. Achamos soluções dessas EDOs que satisfazem as condições de contorno (2).
Passo 3. Finalmente, usando **séries de Fourier**, faremos uma composição das soluções obtidas no Passo 2 para obtermos a solução de (1) que satisfaz ambas (2) e (3), ou seja, a solução de nosso modelo da corda vibrante.

Passo 1. Duas EDOs da Equação da Onda (1)

No **"método da separação de variáveis",** ou *método do produto*, determinamos soluções da equação da onda da forma

(4) $$u(x, t) = F(x)G(t)$$

que sejam um produto de duas funções, cada uma dependendo somente de uma das variáveis x e t. Este é um poderoso método geral que possui diversas aplicações na matemática para engenharia, conforme veremos neste capítulo. Derivando (4), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

na qual os pontos indicam as derivadas em relação a t e as aspas indicam as derivadas em relação a x. Inserindo esses dados na equação da onda (1), temos

$$F\ddot{G} = c^2 F''G.$$

Dividindo por c^2FG e simplificando, vem

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}.$$

As variáveis estão agora separadas, com o lado esquerdo dependendo somente de t e o direito somente de x. Logo, ambos os lados devem ser constantes porque, se fossem variáveis, ao se variar t ou x, somente um dos lados seria afetado, deixando o outro inalterado. Portanto, digamos:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k.$$

Multiplicando essa expressão pelos denominadores, obtemos de imediato duas EDs **ordinárias**

(**5**) $$F'' - kF = 0$$

e

(**6**) $$\ddot{G} - c^2 kG = 0.$$

Aqui, a **constante de separação** k é ainda arbitrária.

Passo 2. Satisfazendo as Condições de Contorno (2)

Determinemos agora soluções F e G para (5) e (6), de modo que $u = FG$ satisfaça as condições de contorno (2), ou seja:

(7) $$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \qquad u(L, t) = F(L)G(t) = 0 \qquad \text{para todo } t.$$

Primeiro, resolvemos (5). Se $G \equiv 0$, então $u = FG \equiv 0$, o que não tem interesse. Logo, $G \not\equiv 0$ e, então, de (7) vem:

(8) $$\text{(a) } F(0) = 0, \qquad \text{(b) } F(L) = 0.$$

Mostremos que k deve ser negativo. Para $k = 0$, a solução geral de (5) é $F = ax + b$ e de (8) obtemos $a = b = 0$, de modo que $F \equiv 0$ e $u = FG \equiv 0$, o que não tem qualquer interesse. Para valores positivos de $k = u^2$, uma solução geral de (5) é

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

e, de (8), obtemos $F \equiv 0$ como antes (verifique!). Portanto, ficamos com a possibilidade de escolher k negativo, digamos, $k = -p^2$. Então, (5) transforma-se em $F'' + p^2F = 0$ e tem como solução geral

$$F(x) = A \cos px + B \operatorname{sen} px.$$

Desta e de (8), temos

$$F(0) = A = 0 \quad \text{e então} \quad F(L) = B \operatorname{sen} pL = 0.$$

É necessário fazer $B \neq 0$ uma vez que, caso contrário, $F \equiv 0$. Logo, sen $pL = 0$. Assim:

(9) $$pL = n\pi, \qquad \text{tal que} \qquad p = \frac{n\pi}{L} \qquad (n \text{ inteiro}).$$

Fazendo $B = 1$, obtemos um número infinito de soluções $F(x) = F_n(x)$, onde

(10) $$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Essas soluções satisfazem (8). [Para valores inteiros e negativos de n, obtemos essencialmente as mesmas soluções, exceto por um sinal negativo, visto que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$.]

Agora, resolvemos (6) com $k = -p^2 = -(n\pi/L)^2$ resultante de (9), isto é:

(11*) $$\ddot{G} + \lambda_n{}^2 G = 0 \qquad \text{onde} \qquad \lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L}.$$

Uma solução geral é

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n{}^* \operatorname{sen} \lambda_n t.$$

Logo, as soluções de (1) que satisfazem (2) são $u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = G_n(t)F_n(x)$, que escremos como:

(11) $$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n{}^* \operatorname{sen} \lambda_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Essas funções são chamadas de **autofunções**, ou *funções características*, e os valores $\lambda_n = cn\pi/L$ são chamados de **autovalores**, ou *valores característicos*, de uma corda vibrante. O conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ é chamado de **espectro**.

Discussão das Autofunções. Vemos que cada u_n representa um movimento harmônico cuja **freqüência** corresponde a $\lambda_n/2\pi = cn/2L$ ciclos por unidade de tempo. Esse movimento é chamado de n-ésimo **modo normal** da corda. O primeiro modo normal é conhecido como o *modo fundamental* ($n = 1$), sendo os demais conhecidos como *sobretons*; musicalmente eles dão a oitava, oitava mais quinta etc. Como, em (11),

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = 0 \qquad \text{em} \qquad x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n} L,$$

o n-ésimo modo normal tem $n - 1$ **nós**, ou seja, pontos da corda que não se movem (além das extremidades fixas); veja a Fig. 284.

A Fig. 285 mostra o segundo modo normal para diversos valores de t. Em qualquer instante, a corda tem a forma de uma onda senoidal. Quando a parte esquerda da corda está se movendo para baixo, a outra metade está se movendo para cima e vice-versa. A situação é similar para os outros modos.

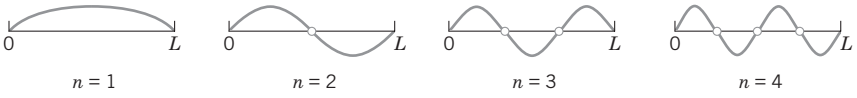


Fig. 284. Modos normais da corda vibrante

A **afinação** é feita modificando-se a tensão T. Nossa fórmula para a freqüência $\lambda_n/2\pi = cn/2L$ de u_n com $c = \sqrt{T/\rho}$ [veja (3) da Seção 12.2] confirma esse efeito, pois mostra que a freqüência é proporcional à tensão. Não é possível aumentar T indefinidamente, mas você consegue perceber o que fazer para ter uma corda com um modo fundamental alto? (Pense em ambos, L e ρ.) Por que um violino é menor que um contrabaixo?

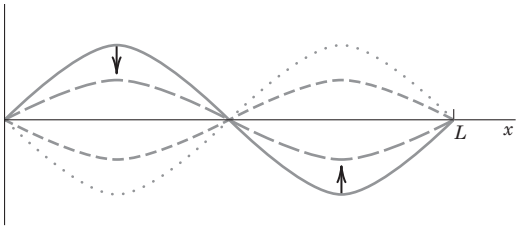


Fig. 285. Segundo modo normal para vários valores de t

Passo 3. Solução do Problema Inteiro. Série de Fourier

As autofunções (11) satisfazem a equação da onda (1) e as condições de contorno (2) (corda fixa nas extremidades). Em geral, uma única u_n não satisfará as condições iniciais (3). Porém, como a equação da onda (1) é linear e homogênea, segue-se do Teorema Fundamental 1 da Seção 12.1 que a soma de um número finito de soluções u_n é uma solução de (1). Para obtermos uma solução que também satisfaça as condições iniciais (3), consideramos a série infinita (com $\lambda_n = cn\pi/L$ como antes)

(**12**)
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \operatorname{sen} \lambda_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Satisfazendo à Condição Inicial (3a) (Deslocamento Inicial Dado). De (12) e (3a), obtemos

(13)
$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = f(x).$$

Logo, devemos escolher os B_n's de modo que $u(x, 0)$ se torne a **série senoidal de Fourier** de $f(x)$. Assim, de (4) na Seção 11.3

(**14**)
$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Satisfazendo à Condição Inicial (3b)(Velocidade Inicial Dada). Similarmente, derivando (12) em relação a t e usando (3b), obtemos

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = g(x).$$

Portanto, devemos escolher os B_n^*'s tais que, para $t = 0$, a derivada $\delta u/\delta t$ se torne a série de Fourier senoidal de $g(x)$. Assim, novamente de (4) na Seção 11.3, vem

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Como $\lambda_n = cn\pi/L$, obtemos por divisão:

(**15**)
$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Resultado. Nossa discussão mostra que $u(x, t)$, dada por (12) com os coeficientes (14) e (15), é uma solução de (1) que satisfaz a todas as condições em (2) e (3) desde que a série (12) convirja, e o mesmo também ocorra com a série obtida pela dupla derivação termo a termo de (12) em relação a x e t, e tem as somas $\delta^2u/\delta x^2$ e $\delta^2u/\delta t^2$, respectivamente, que são contínuas.

Solução (12) Estabelecida. Segundo nossa demonstração, a solução (12) é, a princípio, puramente uma expressão formal, porém, iremos agora estabelecê-la. Por simplicidade, consideremos somente o caso quando a velocidade inicial $g(x)$ é identicamente nula. Neste caso, os B_n^* são iguais a zero e (12) se reduz a

$$\textbf{(16)} \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

É possível ***somar essa série***, ou seja, escrever o resultado em uma forma finita ou fechada. Para esse propósito, usamos a fórmula [veja (11) no Apêndice A3.1]

$$\cos \frac{cn\pi}{L} t \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left\{\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right\} + \operatorname{sen}\left\{\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right\}\right].$$

Conseqüentemente, podemos escrever (16) na forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left\{\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left\{\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right\}.$$

Essas duas séries são aquelas obtidas pela substituição de $x - ct$ e $x + ct$, respectivamente, pela variável x na série senoidal de Fourier (13) para $f(x)$. Logo,

$$\textbf{(17)} \qquad u(x, t) = \tfrac{1}{2}[f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]$$

onde f^* é a extensão periódica ímpar de f com período igual a $2L$ (Fig. 286). Como a deflexão inicial $f(x)$ é contínua no intervalo $0 \leqq x \leqq L$ e zero nas extremidades, de (17) decorre que $u(x, t)$ é uma função contínua de ambas as variáveis x e t para todos os valores destas variáveis. Derivando (17), vemos que $u(x, t)$ é uma solução de (1), desde que $f(x)$ seja duplamente derivável no intervalo $0 < x < L$, e tenha derivadas segundas unilaterais em $x = 0$ e $x = L$, que são iguais a zero. Nestas condições, estabelece-se $u(x, t)$ como uma solução de (1) que satisfaz (2) e (3) com $g(x) \equiv 0$.

Fig. 286. Extensão periódica ímpar de $f(x)$

Solução Generalizada. Se $f'(x)$ e $f''(x)$ são meramente contínuas por intervalo (veja a Seção 6.1), ou se essas derivadas unilaterais são não-nulas, então, para cada t, haverá um número finito de valores de x onde as derivadas segundas de u que aparecem em (1) não existem. À exceção destes pontos, a equação da onda ainda assim será satisfeita. Podemos então considerar $u(x, t)$ como uma **"solução generalizada"**, como ela é chamada, isto é, uma solução num sentido mais amplo. Por exemplo, uma deflexão inicial triangular, como no Exemplo 1 (a seguir), leva-nos a uma solução generalizada.

Interpretação Física da Solução (17). O gráfico de $f^*(x - ct)$ é obtido do gráfico de $f^*(x)$ pelo deslocamento para a direita das últimas unidades ct (Fig. 287). Isto significa que $f^*(x - ct)$ $(c > 0)$ representa uma onda se deslocando para a direita à medida que t aumenta. Similarmente, $f^*(x + ct)$ representa uma onda se deslocando para a esquerda e $u(x, t)$ é a superposição dessas duas ondas.

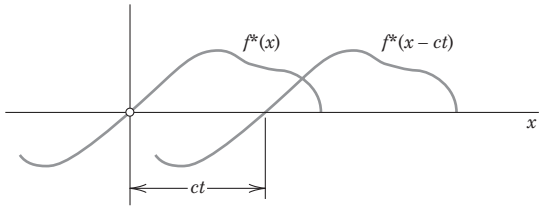


Fig. 287. Interpretação de (17)

EXEMPLO 1 Corda Vibrante se a Deflexão Inicial É Triangular

Ache a solução da equação da onda (1) correspondente à deflexão inicial triangular

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \text{se} \quad 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2k}{L}(L - x) & \text{se} \quad \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

e à velocidade inicial nula (a Fig. 288 mostra $f(x) = u(x, 0)$ no topo).

Solução. Como $g(x) \equiv 0$, temos $B_n^* = 0$ em (12). Do Exemplo 4 na Seção 11.3, vemos que os B_n são dados por (5) da Seção 11.3. Logo, (12) assume a seguinte forma

$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi c}{L}t - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x\cos\frac{3\pi c}{L}t + - \cdots\right].$$

Para representarmos graficamente a solução, podemos usar $u(x, 0) = f(x)$ e a interpretação anterior das duas funções na representação (17). Isso leva ao gráfico mostrado na Fig. 288. ■

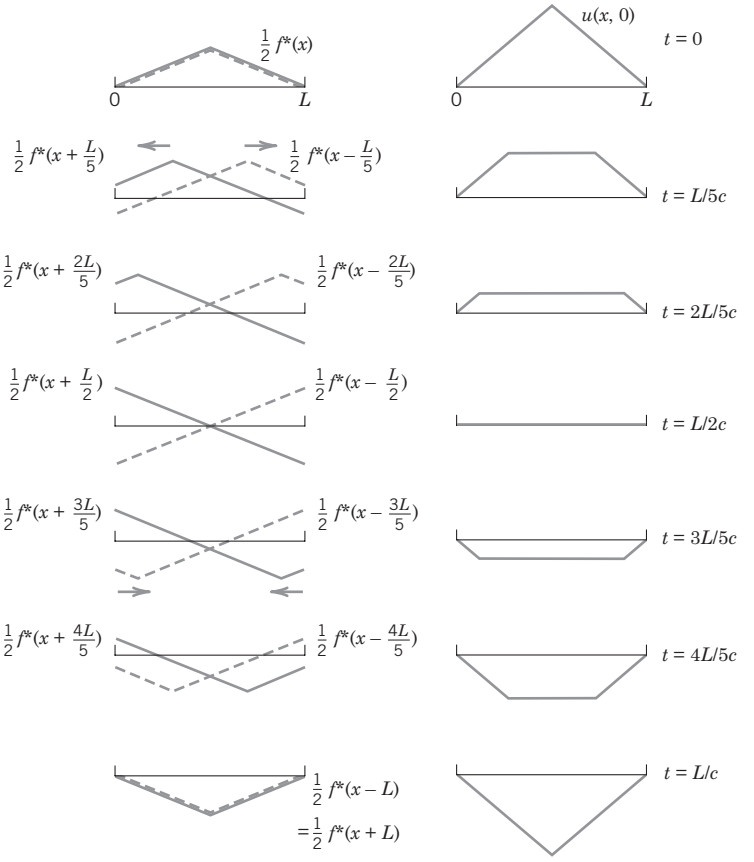


Fig. 288. Solução $u(x, t)$ do Exemplo 1 para vários valores de t (parte direita da figura) obtida como a superposição de uma onda deslocando-se para a direita (tracejada) e uma onda deslocando-se para a esquerda (parte esquerda da figura)

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.3

1–10 DEFLEXÃO DA CORDA

Encontre $u(x, t)$ para a corda de comprimento $L = 1$ e $c^2 = 1$ quando a velocidade inicial for zero e a deflexão inicial com pequenos valores de k (digamos, 0,01), for como se segue. Faça um esboço ou gráfico como o da Fig. 288.

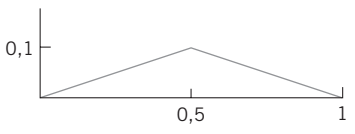
1. $k \operatorname{sen} 2\pi x$

2. $k(\operatorname{sen}\pi x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\pi x)$

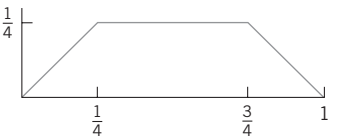
3. $kx(1 - x)$

4. $kx(1 - x^2)$

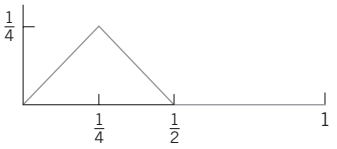
5.



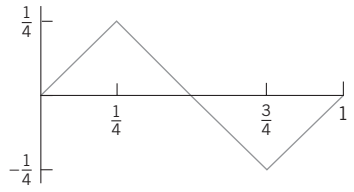
6.



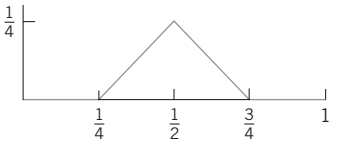
7.



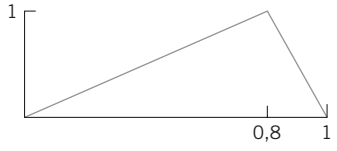
8.



9.



10.



11. (Freqüência) De que maneira a freqüência do modo fundamental de uma corda vibrante depende do comprimento da corda? Da massa por unidade de comprimento? O que acontece à corda se sua tensão dobrar? Por que um contrabaixo é maior que um violino?

12. (Velocidade inicial diferente de zero) Encontre a deflexão $u(x, t)$ da corda de comprimento $L = \pi$ e $c^2 = 1$ para um deslocamento inicial zero e um velocidade inicial "triangular" $u_t(x, 0) = 0{,}01x$ se $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, $u_t(x, 0) = 0{,}01(\pi - x)$ se $\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \pi$. (Condições iniciais com $u_t(x, 0) \neq 0$ são difíceis de se realizar experimentalmente.)

13. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Representação Gráfica de Modos Normais. Escreva um programa para representar graficamente u_n com $L = \pi$ e c^2 à sua escolha, de modo similar ao que se fez na Fig. 284. Aplique o programa a u_2, u_3, u_4. Represente também essas soluções como superfícies sobre o plano xt. Explique a conexão existente entre estes dois tipos de gráficos.

14. PROJETO DE EQUIPE. Vibrações Forçadas de uma Corda Elástica. Mostre o seguinte.

(**a**) Que a substituição de

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{17}$$

(L = comprimento da corda) na equação da onda (1), regulando vibrações livres, leva a [veja (10*)]

$$\ddot{G}_n + \lambda_n{}^2 G = 0, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}. \tag{18}$$

(**b**) Que as vibrações forçadas de uma corda sob uma força externa $P(x, t)$ por unidade de comprimento e agindo normalmente à corda são reguladas pela EDP

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho}}. \tag{19}$$

(**c**) Que, para uma força senoidal $P = A\rho \operatorname{sen} \omega t$, obtemos

$$\frac{P}{\rho} = A \operatorname{sen} \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

$$k_n(t) = \begin{cases} (4A/n\pi) \operatorname{sen} \omega t & (n \text{ ímpar}) \\ 0 & (n \text{ par}). \end{cases} \tag{20}$$

Substituindo (17) e (20) em (19), temos

$$\ddot{G}_n + \lambda_n{}^2 G_n = \frac{2A}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \operatorname{sen} \omega t.$$

Se $\lambda_n{}^2 \neq \omega^2$, a solução é

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n{}^* \operatorname{sen} \lambda_n t + \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n{}^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \omega t.$$

Determine B_n e $B_n{}^*$ de modo que u satisfaça às condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$

(**d**) **(Ressonância)** Mostre que, se $\lambda_n = \omega$, então

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n{}^* \operatorname{sen} \omega t - \frac{A}{n\pi\omega}(1 - \cos n\pi) t \cos \omega t.$$

(**e**) **(Redução das condições de contorno)** Mostre que um problema (1)–(3) com condições de contorno mais complicadas $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = h(t)$ pode ser reduzido a um problema envolvendo uma nova função v que satisfaz às condições: $v(0, t) = v(L, t) = 0$, $v(x, 0) = f_1(x)$, $v_t(x, 0) = g_1(x)$, excluindo-se o caso de equações de onda não-homogêneas. *Sugestão:* faça $u = v + w$ e determine um valor adequado para w.

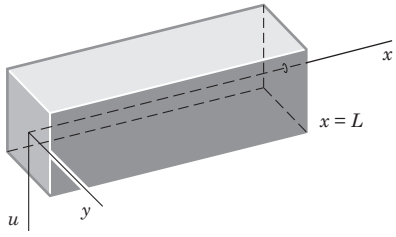


Fig. 289. Viga elástica

15–20 SEPARAÇÃO DE UMA EDP DE QUARTA ORDEM. VIGA VIBRANTE

Pelos princípios usados na modelagem da corda, pode-se mostrar que pequenas vibrações livres verticais de um viga vibrante (Fig. 289) são modeladas por uma **EDP** de quarta ordem

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}} \tag{21}$$

(Ref. [C11])

em que $c^2 = EI/\rho A$ (E = módulo de elasticidade de Young, I = momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y na figura, ρ = massa específica, A = área da seção transversal). (O curvamento de uma viga sob uma carga é discutido na Seção 3.3.)

15. A substituição de $u = F(x)G(t)$ em (21) mostra que

$$F^{(4)}/F = -\ddot{G}/c^2 G = \beta^4 = const.,$$
$$F(x) = A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x + C \cosh \beta x + D \operatorname{senh} \beta x,$$
$$G(t) = a \cos c\beta^2 t + b \operatorname{sen} c\beta^2 t.$$

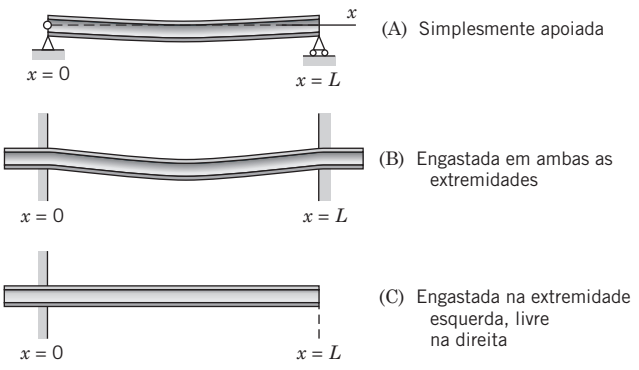


Fig. 290. Suportes de uma viga

16. (A viga com um apoio simples da Fig. 290 A) Encontre soluções $u_n = F_n(x)G_n(t)$ de (21) correspondentes à velocidade inicial zero e que satisfaçam às condições de contorno (veja a Fig. 290A)

$$u(0, t) = 0,\ u(L, t) = 0$$

(extremidades sobre apoios simples em todos os instantes t),

$$u_{xx} = (0, t) = 0,\ u_{xx}(L, t) = 0$$

(momentos nulos, portanto, uma curvatura nula nas extremidades).

17. Encontre a solução de (21) que satisfaça às condições do Problema 1, bem como a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x) = u(L - x).$$

18. Compare os resultados dos Problemas 17 e 3. Qual é a diferença básica entre as freqüências dos modos normais da corda vibrante e a da viga vibrante?

19. (Viga travada da Fig. 290B) Quais são as condições de contorno para a viga travada da Fig. 290B? Mostre que F no Problema 15 satisfaz a essas condições se βL é uma solução da equação

$$\cosh \beta L \cos \beta L = 1. \tag{22}$$

Determine soluções aproximadas de (22), por exemplo, graficamente a partir das interseções das curvas $\cos \beta L$ e $1/\cosh \beta L$.

20. (Viga travada-livre da Fig. 290C) Se a viga estiver travada à esquerda e livre à direita (Fig. 290C), as condições de contorno são

$$u(0, t) = 0, \qquad u_x(0, t) = 0,$$
$$u_{xx}(L, t) = 0, \qquad u_{xxx}(L, t) = 0.$$

Mostre que F no Problema 15 satisfaz a essas condições se βL for uma solução da equação

$$\cosh \beta L \cos \beta L = -1. \tag{23}$$

Encontre soluções aproximadas de (18).

12.4 Solução de D'Alembert da Equação da Onda. Características.

É interessante que a solução da equação da onda (17) da Seção 12.3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}, \tag{1}$$

possa ser imediatamente obtida por uma transformação adequada de (1), isto é, pela introdução de duas novas variáveis independentes

$$v = x + ct, \qquad w = x - ct. \tag{2}$$

Então, u torna-se uma função de v e w. As derivadas em (1) podem agora ser expressas em termos de derivadas em relação a v e w pelo uso da regra da cadeia na Seção 9.6. Representando as derivadas parciais por subscritos, vemos de (2) que $v_x = 1$ e $w_x = 1$. Por simplicidade, escreveremos $u(x, t)$, como uma função de v e w, pela mesma letra u. Então,

$$u_x = u_v v_x + u_w w_x = u_v + u_w.$$

Agora, apliquemos a regra da cadeia ao lado direito desta equação. Suponhamos que todas as derivadas parciais envolvidas sejam contínuas, de modo que $u_{wv} = u_{vw}$. Como $v_x = 1$ e $w_x = 1$, obtemos

$$u_{xx} = (u_v + u_w)_x = (u_v + u_w)_v v_x + (u_v + u_w)_w w_x = u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}.$$

Usando o mesmo procedimento para transformar em (1) a outra derivada, encontramos

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vw} + u_{ww}).$$

Inserindo esses dois resultados em (1), obtemos (veja a nota de rodapé 2 no Apêndice A3.2)

$$u_{vw} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial w\, \partial v} = 0. \tag{3}$$

O aspecto interessante do presente método é que (3) pode ser rapidamente resolvida por duas integrações sucessivas: a primeira em relação a w e a segunda em relação a v. Isso fornece

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v) \qquad \text{e} \qquad u = \int h(v)\, dv + \psi(w).$$

Aqui, $h(v)$ e $\psi(w)$ são funções arbitrárias de v e w, respectivamente. Como a integral é uma função de v, digamos, $\phi(v)$, a solução é da forma $u = \phi(v) + \psi(w)$. Em termos de x e t e de (2), temos, portanto,

(**4**) $$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Esta expressão é conhecida como **solução de D'Alembert**[1] para a equação da onda (1).

Sua demonstração foi muito mais elegante que o método da Seção 12.3, mas o método de D'Alembert é especial, ao passo que o uso da série de Fourier se aplica a várias equações, como veremos.

Solução de D'Alembert Satisfazendo às Condições Iniciais

(5) $$\text{(a)} \quad u(x, 0) = f(x), \qquad \text{(b)} \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Estas são as mesmas condições de (3) na Seção 12.3. Derivando (4), temos

(6) $$u_t(x, t) = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct)$$

na qual as aspas indicam as derivadas em relação aos argumentos *inteiros* $x + ct$ e $x - ct$, respectivamente, e o sinal negativo resulta da regra da cadeia. De (4)-(6), temos

(7) $$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x),$$

(8) $$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x).$$

Dividindo (8) por c e integrando em x, obtemos

(9) $$\phi(x) - \psi(x) = k(x_0) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds, \qquad k(x_0) = \phi(x_0) - \psi(x_0).$$

Se adicionarmos esta expressão a (7), então ψ desaparecerá e a divisão por 2 fornece

(10) $$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds + \frac{1}{2} k(x_0).$$

Similarmente, subtraindo (9) de (7) e dividindo por 2, temos

(11) $$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds - \frac{1}{2} k(x_0).$$

Em (10), substituímos x por $x + ct$; então integramos de x_0 a $x + ct$. Em (11), substituímos x por $x - ct$ e integramos de $x - ct$ a x_0, dando a este resultado um sinal negativo, ou integramos de x_0 a $x - ct$ e ficamos com um sinal positivo. Portanto, a adição de $\phi(x + ct)$ e $\psi(x - ct)$ fornece $u(x, t)$ [veja (4)] na forma

(**12**) $$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x + ct) + f(x - ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds.$$

Se a velocidade inicial é zero, vemos que esta se reduz a

(13) $$u(x, t) = \tfrac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)],$$

o que está de acordo com (17) da Seção 12.3. Você pode mostrar que, devido às condições de contorno (2) naquela seção, a função f deve ser ímpar e ter o período $2L$.

Nosso resultado mostra que as duas condições iniciais [as funções $f(x)$ e $g(x)$ em (5)] determinam a solução de modo único.

A solução da equação da onda pelo método da transformada de Laplace será mostrada na Seção 12.11.

[1] JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783), matemático francês, também conhecido por seus importantes trabalhos em mecânica.

Dizemos que a teoria geral das EDPs oferece um modo sistemático de obtenção da transformação (2) que simplifica (1). Veja a Ref. [C8] no Apêndice 1.

Características. Tipos e Formas Normais de EDPs

A idéia da solução de D'Alembert nada mais é que um caso especial do **método de características**, que se refere às EDPs da forma

(14) $$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

(bem como às EDPs em mais de duas variáveis). A Equação (14) é chamada de **semilinear**, porque é linear nas derivadas mais altas (podendo, porém, ser indeterminada nos demais casos). Há três tipos de EDPs (14), dependendo do discriminante $AC - B^2$, como se segue:

Tipo	Condição de Definição	Exemplo da Seção 12.1
Hiperbólica	$AC - B^2 < 0$	Equação da onda (1)
Parabólica	$AC - B^2 = 0$	Equação do calor (2)
Elíptica	$AC - B^2 > 0$	Equação de Laplace (3)

Note que (1) e (2) na Seção 12.1 envolvem t, mas, para termos y como em (14), devemos fazer $y = ct$ em (1), obtendo assim $u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 (u_{yy} - u_{xx}) = 0$ e, em (2), fazemos $y = c^2t$, de modo que $u_t - c^2 u_{xx} = c^2 (u_y - u_{xx})$.

A, B, C podem ser funções de x, y de maneira que uma EDP possa ser do **tipo misto**, isto é, de diferentes tipos em diferentes regiões do plano xy. Uma importante EDP do tipo misto é a **equação de Tricomi** (veja o Problema 10).

Transformação de (14) ao Tipo Normal. As formas normais de (14) e suas correspondentes transformações dependem do tipo da EDP. Elas são obtidas resolvendo-se a **equação característica** de (14), que é a EDO

(15) $$Ay'^2 - 2By' + C = 0$$

na qual $y' = dy/dx$ (note que temos $-2B$, e não $+2B$). Dizemos que as soluções de (15) são as **características** de (14), que escrevemos na forma $\Phi(x, y) = const.$ e $\Psi(x, y) = const.$ Então, as transformações dando novas variáveis v e w, no lugar de x e y e as formas normais de (14) são como se segue.

Tipo	Novas Variáveis		Forma Normal
Hiperbólica	$v = \Phi$	$w = \Psi$	$u_{vw} = F_1$
Parabólica	$v = x$	$w = \Phi = \Psi$	$u_{ww} = F_2$
Elíptica	$v = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$	$w = 1/2i(\Phi - \Psi)$	$u_{vv} + u_{ww} = F_3$

Aqui, $\Phi = \Phi(x, y)$, $\Psi = \Psi(x, y)$, $F_1 = F_1(v, w, u, u_v, u_w,)$ etc. e escrevemos u como uma função de v, e w de novo como u, por simplicidade. Vemos que a forma normal de uma EDP hiperbólica é como aparece na solução de D'Alembert. No caso parabólico, simplesmente tomamos uma família de soluções $\Phi = \Psi$. No caso elíptico, $i = \sqrt{-1}$, e as características são complexas, sendo de menor interesse. A dedução disso pode ser vista na Ref. [GR3] no Apêndice 1.

EXEMPLO 1 Solução de D' Alembert Obtida Sistematicamente

A solução de D' Alembert é apresentada de modo sistemático pela teoria das características. Para vermos isto, escrevamos a equação da onda $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$ na forma (14), fazendo $y = ct$. Pela regra da cadeia, $u_t = u_y\, y_t = cu_y$ e $u_{tt} = c^2u_{yy}$. A divisão por c^2 fornece $u_{xx} - u_{yy} = 0$, como afirmado anteriormente. Logo, a equação característica é $y'^2 - 1 = (y' + 1)(y' - 1) = 0$. As duas famílias de soluções (característica) são $\Phi(x, y) = y + x = const.$ e $\Psi(x, y) = y - x = const.$ Isso fornece as novas variáveis $v = \Phi = y + x = ct + x$ e $w = \Psi = y - x = ct - x$ e a solução de D'Alembert $u = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.4

1. Mostre que c é a velocidade de cada uma das duas ondas dadas por (4).

2. Mostre que, devido às condições de contorno (2) da Seção 12.3, a função f em (13) desta seção deve ser ímpar e ter um período $2L$.

3. Se um arame de aço de 2 m de comprimento pesa 0,9 N (cerca de 0,20 libra) e é esticado por uma força de tensão de 300 N (cerca de 67,4 libras), qual é a velocidade correspondente das ondas transversais?

4. Quais são as freqüências das autofunções no Problema 3?

5. Vibrações Longitudinais de uma Barra ou Haste Elástica. Essas vibrações na direção do eixo x são modeladas pela equação da onda $u_{tt} = c^2u_{xx}$, $c^2 = E/\rho$ (veja Tolstov [C9], pág.275). Se a haste estiver presa em uma extremidade $x = 0$ e livre na outra $x = L$, temos $u(0, t) = 0$ e $u_x(L, t) = 0$. Mostre que o movimento correspondente ao deslocamento inicial $u(x, 0) = f(x)$ e à velocidade inicial nula é

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen} p_n x \cos p_n ct,$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} p_n x\, dx, \qquad p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}.$$

6–9 GRÁFICOS DE SOLUÇÕES

Usando (13), faça um esboço ou figura (semelhante à Fig. 288 na Seção 12.3) da deflexão $u(x, t)$ de uma corda vibrante (comprimento $L = 1$, extremidades fixas, $c = 1$) começando com a velocidade inicial 0 e a deflexão inicial (com k pequeno, digamos, $k = 0{,}01$).

6. $f(x) = k \operatorname{sen} \pi x$ **7.** $f(x) = k(1 - \cos 2\pi x)$

8. $f(x) = kx(1 - x)$ **9.** $f(x) = k(x - x^3)$

10. (Equações de Tricomi e Airy[2]) Mostre que a *equação de Tricomi* $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ é do tipo misto. Obtenha a **equação de Airy** $G'' - yG = 0$ a partir da equação de Tricomi por separação de variáveis. (Para as soluções, veja a Ref. [GR1] listada no Apêndice 1.)

11–20 FORMAS NORMAIS

Encontre o tipo, passe para forma normal e resolva. (Mostre os detalhes do que fizer.)

11. $u_{xy} - u_{yy} = 0$ **12.** $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

13. $u_{xx} + 9u_{yy} = 0$ **14.** $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$

15. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ **16.** $xu_{xy} - yu_{yy} = 0$

17. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$ **18.** $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$

19. $xu_{xx} - yu_{xy} = 0$ **20.** $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$

12.5 Equação do Calor: Solução por Séries de Fourier

Da equação da onda, passemos agora para a próxima "grande" EDP, a **equação do calor**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\nabla^2 u, \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho},$$

que fornece a temperatura $u(x, y, z, t)$ num corpo de material homogêneo. Aqui, c^2 é a difusividade térmica, K a condutividade térmica, σ o calor específico e ρ a massa específica do material do corpo. $\nabla^2 u$ é o laplaciano de u e em coordenadas cartesianas x, y, z,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

A equação do calor foi deduzida na Seção 10.8 e é também chamada de **equação de difusão**.

Como uma importante aplicação, consideremos primeiro a temperatura numa longa e fina barra metálica ou arame, com seção transversal constante e de material homogêneo, orientada ao longo do eixo x (Fig. 291), estando também perfeitamente isolada lateralmente, de modo que o fluxo de calor só se propaga na direção do eixo x. Então, u depende somente de x e do tempo t e a equação do calor se torna a **equação do calor unidimensional**

(1)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Fig. 291. Barra considerada

[2] SIR GEORGE BIDELL AIRY (1801–1892), matemático inglês, conhecido por seus trabalhos em elasticidade. FRANCESCO TRICOMI (1897–1978), matemático italiano, que trabalhou com equações integrais.

Ela parece diferir muito pouco da equação da onda, que tem um termo u_{tt} no lugar de u_t, mas veremos que isto fará com que as soluções de (1) se comportem de modo bem diferente das soluções obtidas para a equação da onda.

Resolveremos (1) para alguns tipos importantes de condições iniciais e de contorno. Comecemos com o caso onde as extremidades da barra, $x = 0$ e $x = L$, são mantidas na temperatura zero, de modo que as **condições de contorno** são

(2) $$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0 \qquad \text{para todo } t.$$

Além disso, a temperatura inicial da barra no instante $t = 0$ é fornecida, digamos por $f(x)$, de modo que temos a **condição inicial**

(3) $$u(x, 0) = f(x) \qquad [f(x) \text{ dada}].$$

Aqui devemos ter $f(0) = 0$ e $f(L) = 0$ por causa de (2).

Determinaremos uma solução $u(x, t)$ de (1) que satisfaça (2) e (3) — uma condição inicial será suficiente, diferentemente duas condições iniciais para a equação da onda. Tecnicamente, nosso método será paralelo ao utilizado para a equação da onda na Seção 12.3: uma separação de variáveis, seguida do uso da série de Fourier. Uma comparação passo a passo desses dois procedimentos pode-lhe ser de interesse.

Passo 1. **Duas EDOs a partir da equação do calor (1)**. A substituição de um produto $u(x, t) = F(x)G(t)$ em (1) dá $F\dot{G} = c^2F''G$ com $\dot{G} = dG/dt$ e $F'' = d^2F/dx^2$. Para separar as variáveis, dividimos essa expressão por c^2FG, obtendo

(4) $$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F}.$$

O lado esquerdo depende somente de t e o lado direito somente de x, de modo que ambos os lados devem ser iguais a uma constante k (como na Seção 12.3). Você pode mostrar que, para $k = 0$ ou $k > 0$, a única solução $u = FG$ satisfazendo (2) é $u \equiv 0$. Para valores negativos $k = -p^2$, temos de (4),

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = -p^2.$$

A multiplicação pelos denominadores fornece imediatamente as duas EDOs

(5) $$F'' + p^2F = 0$$

e

(6) $$\dot{G} + c^2p^2G = 0.$$

Passo 2. **Satisfazendo às condições de contorno (2)**. Primeiramente, resolvemos (5). Uma solução geral é:

(7) $$F(x) = A \cos px + B \operatorname{sen} px.$$

Das condições de contorno (2), segue-se que

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(L, t) = F(L)\,G(t) = 0.$$

Como $G \equiv 0$ resultaria em $u \equiv 0$, requeremos que $F(0) = 0$, $F(L) = 0$ e obtemos de (7) que $F(0) = A = 0$, e então $F(L) = B \operatorname{sen} pL = 0$ com $B \neq 0$ (para evitarmos $F \equiv 0$); portanto,

$$\operatorname{sen} pL = 0, \qquad \text{logo} \qquad p = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Fazendo $B = 1$, obtemos, portanto, as seguintes soluções de (5) que satisfazem (2):

$$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

(Tal como na Seção 12.3, não precisamos considerar os valores inteiros *negativos* de n.)

Tudo isto foi literalmente igual ao que ocorreu na Seção 12.3. Porém, de agora em diante, haverá diferenças, visto que (6) difere do (6) da Seção 12.3. Resolvamos agora (6). Para $p = n\pi/L$, que acabamos de obter, (6) torna-se

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \text{onde} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad .$$

Esta equação tem a solução geral

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

na qual B_n é uma constante. Logo, as funções

$$\textbf{(8)} \qquad u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda^n{}^2 t} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

são soluções da equação do calor (1) que satisfazem (2). Estas são as **autofunções** do problema, correspondentes aos **autovalores** $\lambda_n = cn\pi/L$.

***Passo 3.* Solução do problema inteiro. Série de Fourier.** Até aqui, temos soluções (8) que satisfazem as condições de contorno (2). Para obtermos uma solução que também satisfaça a condição inicial (3), consideremos uma série desses autovalores,

$$\textbf{(9)} \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right).$$

Disso e de (3), temos

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Logo, para (9) satisfazer (3), os B_n's devem ser os coeficientes da **série de Fourier do seno**, conforme dada por (4) da Seção 11.3; logo

$$\textbf{(10)} \qquad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Podemos então chegar à solução do nosso problema supondo que $f(x)$ seja contínua por intervalos (veja a Seção 6.1) no intervalo $0 \leqq x \leqq L$ e que possua derivadas unilaterais (veja a Seção 11.1) em todos os pontos interiores àquele intervalo; isto é, sob essas suposições, a série (9) com os coeficientes (10) é a solução do nosso problema físico. Uma prova disso requer o conhecimento de convergência uniforme e será fornecida numa ocasião posterior (Problemas 19 e 20 em Problemas Propostos 21.5).

Devido ao fator exponencial, em (9) todos os termos se aproximam de zero quando t tende ao infinito. A taxa de decrescimento aumenta com n.

EXEMPLO 1 Temperatura Inicial Senoidal

Encontre a temperatura $u(x, t)$ numa barra de cobre de 80 cm de comprimento e isolada lateralmente, considerando que a temperatura inicial seja de 100 sen(πx/80)°C e que extremidades estejam mantidas a 0°C. Quanto tempo será necessário para que a temperatura máxima caia a 50°C? Responda primeiro por palpite, depois calcule. *Dados físicos sobre o cobre*: massa específica 8,92 gm/cm³, calor específico 0,092 cal/(gm° C), condutividade térmica 0,95 cal/(cm s °C).

Solução. A condição inicial fornece

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{80} = f(x) = 100 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80}\ .$$

Logo, por inspeção ou por (9), obtemos $B_1 = 100$, $B_2 = B_3 = \cdots = 0$. Em (9), precisamos de $\lambda_1^2 = c^2\pi^2/L^2$, onde $c^2 = K/(\sigma\rho) = 0{,}95/(0{,}092 \times 8{,}92) = 1{,}158[\text{cm}^2/\text{s}]$. Portanto, obtemos

$$\lambda_1^2 = 1{,}158 \cdot 9{,}870/80^2 = 0{,}001785\ [\text{s}^{-1}].$$

A solução (9) é

$$u(x, t) = 100 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80}\, e^{-0{,}001785t}.$$

Além disso, $100e^{-0{,}001785t} = 50$ quando $t = (\ln 0{,}5)/(-0{,}001785) = 388[\text{s}] \approx 6{,}5$ [min]. O seu palpite, ou pelo menos a ordem de magnitude que você avaliou, concordou com esse resultado? ■

EXEMPLO 2 Velocidade do Decaimento

Resolva o problema do Exemplo 1 quando a temperatura inicial é de 100 sen($3\pi x/80$)°C e os demais dados são como antes.

Solução. Em (9), no lugar de $n = 1$, temos agora $n = 3$, e $\lambda_3^2 = 3^2\lambda_1^2 = 9 \times 0{,}001785 = 0{,}01607$, de modo que, agora, a solução é

$$u(x, t) = 100 \text{ sen } \frac{3\pi x}{80}\, e^{-0{,}01607t}.$$

Logo, a temperatura máxima cai a 50°C em $t = (\ln 0{,}5)/(-0{,}01607) \approx 43$ [segundos], o que é muito mais rápido (nove vezes mais depressa que no Exemplo 1. Por quê?).

Se tivéssemos escolhido um n maior, o decaimento teria sido ainda mais rápido e, numa soma ou série de termos assim, cada termo tem sua própria taxa de decaimento, e os termos com grandes valores de n ficam praticamente nulos após um período de tempo muito curto. Nosso próximo exemplo será deste tipo, e a curva exibida na Fig. 292 correspondente a $t = 0{,}5$ apresenta-se quase igual a uma senóide; ou seja, é praticamente igual ao gráfico do primeiro termo da solução. ■

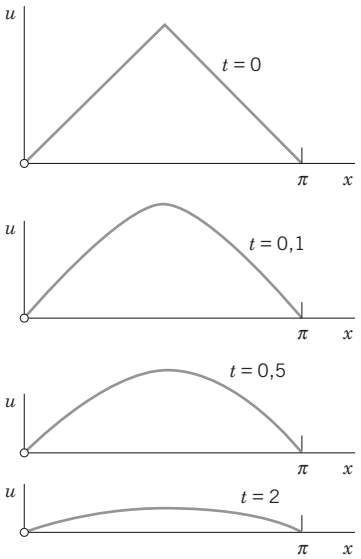


Fig. 292. Exemplo 3. Decréscimo da temperatura com o tempo t para $L = \pi$ e $c = 1$

EXEMPLO 3 Temperatura Inicial "Triangular" em uma Barra

Encontre a temperatura numa barra de comprimento L, lateralmente isolada e cujas extremidades são mantidas numa temperatura 0, supondo que a temperatura inicial seja

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < L/2, \\ L - x & \text{se} \quad L/2 < x < L. \end{cases}$$

(A parte superior da Fig. 292 mostra esta função para o valor especial $L = \pi$.)

Solução. De (10), obtemos:

$$(10^*) \qquad B_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}\, dx + \int_{L/2}^{L} (L - x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}\, dx\right).$$

A integração fornece $B_n = 0$, se n é par,

$$B_n = \frac{4L}{n^2\pi^2} \qquad (n = 1, 5, 9, \cdots) \qquad \text{e} \qquad B_n = -\frac{4L}{n^2\pi^2} \qquad (n = 3, 7, 11, \cdots).$$

(veja também o Exemplo 4 da Seção 11.3, com $k = L/2$). Logo, a solução é

$$u(x, t) = \frac{4L}{\pi^2}\left[\text{sen } \frac{\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 t\right] - \frac{1}{9} \text{ sen } \frac{3\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{3c\pi}{L}\right)^2 t\right] + - \cdots\right].$$

A Fig. 292 mostra que a temperatura decai com o aumento de t, devido à perda de calor causada pelo resfriamento das extremidades.

Compare as Figs. 292 e 288 da Seção 12.3 e comente. ■

EXEMPLO 4 Barra com Extremidades Isoladas. Autovalor 0

Encontre uma fórmula para a solução de (1) e (3), com (2) sendo substituída pela condição de que ambas as extremidades da barra sejam isoladas.

Solução. Experimentos físicos mostram que a taxa do fluxo do calor é proporcional ao gradiente da temperatura. Logo, se as extremidades $x = 0$ e $x = L$ da barra estão isoladas, de modo que nenhum calor pode fluir através das extremidades, temos que grad $u = u_x = \partial u/\partial x$ e que as condições de contorno são

(2*) $u_x(0, t) = 0, \qquad u_x(L, t) = 0$ para todo t.

Como $u(x, t) = F(x)G(t)$, isto fornece $u_x(0, t) = F'(0)\,G(t) = 0$ e $u_x(L, t) = F'(L)G(t) = 0$. Derivando (7), temos $F'(x) = -Ap \operatorname{sen} px + Bp \cos px$, de modo que

$$F'(0) = Bp = 0 \qquad \text{e então} \qquad F'(L) = -Ap \operatorname{sen} pL = 0.$$

A segunda destas condições dá $p = p_n = n\pi/L$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Disto e de (7) com $A = 1$ e $B = 0$, obtemos $F_n(x) = \cos(n\pi x/L)$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Com G_n como antes, obtemos as autofunções

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{11}$$

correspondentes aos autovalores $\lambda_n = cn\pi/L$. Estes últimos são como antes, mas agora temos adicionalmente o autovalor $\lambda_0 = 0$ e a autofunção $u_0 = const.$, que é a solução do problema se a temperatura inicial $f(x)$ é constante. Isto mostra o fato extraordinário de que ***uma constante de separação pode muito bem ser zero, e zero pode ser um autovalor***.

Além disso, enquanto (8) forneceu uma série de Fourier de senos, agora obtemos de (11) uma série de Fourier de cossenos

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right). \tag{12}$$

Seus coeficientes resultam da condição inicial (3),

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

na forma (2) da Seção 11.3, ou seja,

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{13}$$

■

EXEMPLO 5 Temperatura Inicial "Triangular" em uma Barra com Extremidades Isoladas

Encontre a temperatura na barra do Exemplo 3, supondo que as extremidades estejam isoladas (em vez de se manterem à temperatura 0).

Solução. Para a temperatura inicial triangular, (13) fornece $A_0 = L/4$ e (veja também o Exemplo 4 da Seção 11.3, com $k = L/2$)

$$A_n = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L} (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx\right] = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right).$$

Portanto, a solução (12) é

$$u(x, t) = \frac{L}{4} - \frac{8L}{\pi^2}\left\{\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{2c\pi}{L}\right)^2 t\right] + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{6c\pi}{L}\right)^2 t\right] + \cdots\right\}.$$

Vemos que os termos decrescem à medida que t aumenta, e que $u \to L/4$ quando $t \to \infty$; este é o valor médio da temperatura inicial. Isto é plausível, visto que nenhum calor escapa dessa barra totalmente isolada. Em contraste, no Exemplo 3, o resfriamento das extremidades levou à perda de calor e $u \to 0$, temperatura na qual as extremidades foram mantidas. ■

Problemas Bidimensionais Estacionários de Calor. Equação de Laplace

Agora estenderemos nossa discussão de uma para duas dimensões espaciais e consideraremos a equação do calor bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\nabla^2 u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

para problemas **estacionários** (isto é, que *não dependem do tempo*). Então, $\partial u/\partial t = 0$ e a equação do calor se reduz à **equação de Laplace**

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{14}$$

(que já apareceu na Seção 10.8 e será mais tarde considerada nas Seções 12.7–12.10). Um problema de calor consiste então nesta EDP a ser considerada em alguma região R do plano xy e uma dada condição de contorno sobre a curva C de R. Este é um **problema de valor de contorno (PVC)**. Dizemos que ele é:

Primeiro PVC ou **Problema de Dirichlet**, se u for especificada em C (**"Condição de contorno de Dirichlet"**)

Segundo PVC ou **Problema de Neumann**, se a derivada normal $u_n = \partial u/\partial n$ for especificada em C (**"Condição de contorno de Neumann"**)

Terceiro PVC, PVC Misto ou Problema de Robin, se u for especificada numa certa porção de C e u_n na porção restante de C (**"Condição mista de contorno"**).

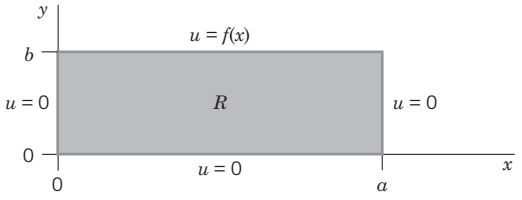


Fig. 293. Retângulo R e as condições de contorno dadas

Problema de Dirichlet em um Retângulo R (Fig. 293). Consideremos um problema de Dirichlet para a equação de Laplace (14) num retângulo R, supondo que a temperatura $u(x, y)$ seja igual a uma dada função $f(x)$ no lado superior e igual a 0 nos outros três lados do retângulo.

Resolvemos este problema por separação de variáveis. Substituindo $u(x, y) = F(x)\,G(y)$ em (14) escrita como $u_{xx} = -u_{yy}$, dividindo por FG e igualando ambos os lados a uma constante negativa , obtemos

$$\frac{1}{F} \cdot \frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{1}{G} \cdot \frac{d^2G}{dy^2} = -k.$$

Disto, obtemos

$$\frac{d^2F}{dx^2} + kF = 0,$$

e as condições de contorno nos lados esquerdo e direito implicam que

$$F(0) = 0, \qquad \text{e} \qquad F(a) = 0.$$

Isto dá $k = (n\pi/a)^2$ e as correspondentes soluções não-nulas

$$F(x) = F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a}x, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{15}$$

A EDO para G com $k = (n\pi/a)^2$ torna-se, então,

$$\frac{d^2G}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0.$$

As soluções são

$$G(y) = G_n(y) = A_n e^{n\pi y/a} + B_n e^{-n\pi y/a}.$$

Agora, a condição de contorno $u = 0$ no lado inferior de R implica que $G_n(0) = 0$; isto é, $G_n(0) = A_n + B_n = 0$ ou $B_n = -A_n$. Isto fornece

$$G_n(y) = A_n(e^{n\pi y/a} - e^{-n\pi y/a}) = 2A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}.$$

Disto e de (15), escrevendo $2A_n = A_n^*$, obtemos as **autofunções** do nosso problema

$$u_n(x, y) = F_n(x)G_n(y) = A_n^* \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}. \tag{16}$$

Estas soluções satisfazem a condição de contorno $u = 0$ nos lados esquerdo, direito e inferior.

Para obtermos uma solução que também satisfaça à condição de contorno $u(x, b) = f(x)$ no lado superior, consideramos a série infinita

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y).$$

Desta e de (16) com $y = b$, obtemos

$$u(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a}.$$

Podemos escrever isto na forma

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^* \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}.$$

Isto mostra que as expressões entre parênteses devem ser os coeficientes de Fourier b_n de $f(x)$; isto é, por (4) da Seção 11.3,

$$b_n = A_n^* \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

Disto e de (16), vemos que a solução do nosso problema é

$$\textbf{(17)} \qquad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

onde

$$\textbf{(18)} \qquad A_n^* = \frac{2}{a \operatorname{senh} (n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

Obtivemos esta solução formalmente, sem levar em consideração a convergência e sem mostrar que as séries u, u_{xx} e u_{yy} têm as somas corretas. Isto pode ser provado se considerarmos que f e f' são contínuas e que f'' é contínua em todos os pontos do intervalo $0 \leqq x \leqq a$. A prova é algo complicada e baseia-se na convergência uniforme, podendo ser encontrada em [C4] no Apêndice 1.

Poder Unificador de Métodos. Eletrostática, Elasticidade

A equação de Laplace (14) também governa o potencial eletrostático de cargas elétricas em qualquer região que esteja livre dessas cargas. Portanto, nosso problema permanente de calor pode também ser interpretado como um problema de potencial eletrostático. Então, (17) e (18) representam o potencial no retângulo R quando o lado superior de R encontra-se no potencial $f(x)$ e os outros três lados estão aterrados.

Na verdade, no caso permanente, a equação da onda bidimensional (a ser considerada nas Seções 12.7 e 12.8) também se reduz a (14). Assim, (17) e (18) representam o deslocamento de uma membrana elástica retangular (folha de borracha, couro de tambor) que é fixada ao longo de seu contorno, com três lados situados no plano xy e o quarto lado dado pelo deslocamento $f(x)$.

Esta é uma outra demonstração impressionante do ***poder unificador*** da matemática. Ele ilustra o fato de que ***sistemas físicos completamente diferentes podem ter o mesmo modelo matemático***, podendo assim ser tratados pelos mesmos métodos matemáticos.

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.5

1. **PROJETO ESCRITO. Equações da Onda e Calor.** Compare essas duas EDPs com relação ao tipo, comportamento geral das autofunções, tipo de contorno e condições iniciais, e problemas práticos resultantes. Discuta também a diferença entre as Figs. 288 na Seção 12.3 e 292.
2. **(Autofunções)** Faça um esboço (ou gráfico) e compare as três primeiras autofunções (8) com $B_n = 1$, $c = 1$, $L = \pi$ para $t = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0.
3. **(Decaimento)** De que maneira a taxa de declínio de (8), com n fixo, depende do calor específico, da massa específica e da condutividade térmica do material?
4. Se a primeira autofunção (8) da barra decresce à metade de seu valor dentro de 10 segundos, quanto vale a difusividade?

5–9 BARRA LATERALMENTE ISOLADA

Uma barra lateralmente isolada de comprimento 10 cm, área de seção transversal de 1 cm², densidade 10,6 gm/cm³, condutividade térmica 1,04 cal/(cm s °C) e calor específico de 0,056 cal/(gm °C) (esses dados correspondem à prata, um bom condutor de calor) tem uma temperatura inicial $f(x)$ e é mantida a 0°C nas extremidades $x = 0$ e $x = 10$. Encontre a temperatura $u(x, t)$ em instantes posteriores. Aqui, $f(x)$ é igual a:

5. $f(x) = \operatorname{sen} 0{,}4\pi x$
6. $f(x) = \operatorname{sen} 0{,}1\pi x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 0{,}2\pi x$
7. $f(x) = 0{,}2x$ se $0 < x < 5$ e 0 nos demais casos
8. $f(x) = 1 - 0{,}2\,|x - 5|$
9. $f(x) = x$ se $0 < x < 2{,}5$, $f(x) = 2{,}5$ se $2{,}5 < x < 7{,}5$, $f(x) = 10 - x$ se $7{,}5 < x < 10$

10. (Temperaturas arbitrárias nas extremidades) Se as extremidades $x = 0$ e $x = L$ da barra no texto são mantidas a temperaturas constantes U_1 e U_2, respectivamente, qual é a temperatura $u_1(x)$ na barra após um longo tempo (teoricamente, quando $t \to \infty$)? Responda primeiro por palpite, depois calcule.

11. No Problema 10, encontre a temperatura num instante qualquer.

12. (Mudanças de temperaturas nas extremidades) Suponha que, nos Problemas 5-9, as extremidades da barra foram mantidas a 100 °C por um longo tempo. Então, num dado instante, que chamaremos de $t = 0$, a temperatura em $x = L$ é repentinamente mudada para 0°C e aí mantida, enquanto a temperatura em $x = 0$ é mantida a 100°C. Encontre a temperatura no meio da barra em $t = 1, 2, 3, 10, 50$ s. Responda primeiro por palpite, então calcule.

BARRA SOB CONDIÇÕES ADIABÁTICAS

"Adiabática" significa sem nenhuma troca de calor com a vizinhança, devido ao fato de estar a barra completamente isolada, inclusive nas extremidades. *Informações físicas*: o fluxo de calor nas extremidades é proporcional ao valor de $\partial u/\partial x$ observado nesses pontos.

13. Mostre que, para a barra completamente isolada, $u_x(0, t) = 0$, $u_x(L, t) = 0$, $u(x, t) = f(x)$ e que, por separação de variáveis, chegamos à seguinte solução, sendo A_n dado por (2) da Seção 11.3

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(cn\pi/L)^2 t}$$

14–19 Encontre a temperatura do Problema 13 com $L = \pi$, $c = 1$ e

14. $f(x) = x$ **15.** $f(x) = 1$

16. $f(x) = 0{,}5 \cos 4x$ **17.** $f(x) = \pi^2 - x^2$

18. $f(x) = \frac{1}{2}\pi - |x - \frac{1}{2}\pi|$ **19.** $f(x) = (x - \frac{1}{2}\pi)^2$

20. Encontre a temperatura da barra no Problema 13 se a extremidade esquerda é mantida a 0°C, a extremidade direita é isolada e a temperatura inicial é $U_0 = constante$.

21. A **condição de contorno da transferência de calor**

$$-u_x(\pi, t) = k[u(\pi, t) - u_0] \tag{19}$$

se aplica quando uma barra, de comprimento π e com $c = 1$, encontra-se lateralmente isolada, a extremidade esquerda $x = 0$ é mantida a 0°C, e, no lado direito, o calor flui para o ar que está a uma temperatura constante u_0. Considere $k = 1$ por simplicidade, e $u_0 = 0$. Mostre que uma solução é $u(x, t) = \text{sen } px\, e^{-p2t}$, onde p é uma solução de $\tan p\pi = -p$. Mostre graficamente que esta equação tem um número infinito de soluções positivas $p_1, p_2, p_3, \cdots$, onde $p_n > n - \frac{1}{2}$ e $\lim_{n\to\infty}(p_n - n + \frac{1}{2}) = 0$. (A fórmula (19) é também conhecida como **condição de contorno de radiação**, embora esse nome seja enganoso; veja a Ref. [C3], p. 19.)

22. (*f* descontínua) Resolva (1), (2) e (3) com $L = \pi$ e $f(x) = U_0 = const.$ $(\neq 0)$ se $0 < x < \pi/2$, $f(x) = 0$ se $\pi/2 < x < \pi$.

23. (Fluxo de calor) O *fluxo de calor* de uma solução $u(x, t)$ através de $x = 0$ é definido por $\phi(t) = -Ku_x(0, t)$. Encontre $\phi(t)$ para a solução (9). Explique o nome. É fisicamente compreensível que ϕ tenda a zero à medida que $t \to \infty$?

OUTRAS EQUAÇÕES DO CALOR

24. (Barra com geração de calor) Se o calor é gerado a uma taxa constante através de uma barra de comprimento $L = \pi$, com uma temperatura inicial $f(x)$ e as extremidades em $x = 0$ e π mantidas na temperatura zero, a equação do calor é $u_t = c^2 u_{xx} + H$ com H constante e maior que zero. Resolva este problema. *Sugestão:* faça $u = v - Hx(x - \pi)/(2c^2)$.

25. (Convecção) Se, na barra mencionada no texto, o calor tiver liberdade para fluir para o meio externo mantido a 0°C, a EDP torna-se $v_t = c^2 v_{xx} - \beta v$. Mostre que ela pode ser reduzida à forma (1) fazendo-se $v(x, t) = u(x, t)\, w(t)$.

26. Considere $v_t = c^2 v_{xx} - v$ $(0 < x < L, t > 0)$, $v(0, t) = 0$, $v(L, t) = 0$, $v(x, 0) = f(x)$, onde o termo $-v$ modela a transferência de calor para o meio externo mantido à temperatura 0. Reduza esta EDP fazendo $v(x, t) = u(x, t)\, w(t)$ com w tal que u seja dada por (9) e (10).

27. (Equação do calor não-homogênea) Mostre que o problema modelado por

$$u_t - c^2 u_{xx} = Ne^{-ax}$$

e (2) e (3) pode ser reduzido a um problema para a equação do calor homogênea fazendo-se

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$

e determine w de modo que v satisfaça a EDP homogênea e as condições $v(0, t) = v(L, t) = 0$, $v(x, 0) = f(x) - w(x)$. (O termo Ne^{-ax} pode representar a perda de calor devido ao decaimento radioativo na barra.)

28–35 PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

28. (Equação de Laplace) Encontre o potencial no retângulo $0 \leqq x \leqq 20$, $0 \leqq y \leqq 40$ cujo lado superior é mantido no potencial de 220 V, estando os outros lados aterrados.

29. (Equação de Laplace) Encontre o potencial no quadrado $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$ cujo lado superior é mantido no potencial de $\text{sen } \frac{1}{2}\pi x$, estando os outros lados aterrados.

30. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Isotermas. Encontre as soluções permanentes (temperaturas) na chapa quadrada da Fig. 294 com $a = 2$ satisfazendo às seguintes condições de contorno. Represente graficamente as isotermas.

(a) $u = \text{sen } \pi x$ no lado superior e 0 nos demais lados.

(b) $u = 0$ nos lados verticais, supondo que os demais lados estejam perfeitamente isolados.

(c) Condições de contorno de sua escolha (porém tais que a solução não seja identicamente nula).

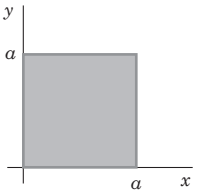


Fig. 294. Chapa quadrada

31. (Fluxo de calor numa chapa) As faces da fina chapa quadrada na Fig. 294 com lado $a = 24$ estão perfeitamente isoladas. O lado superior é mantido a 20ºC e os demais lados são mantidos a 0°C. Encontre a temperatura estacionária $u(x, y)$ na chapa.

32. Encontre a temperatura estacionária na chapa do Problema 31 se o lado inferior for mantido a U_0°C , o lado superior a U_1°C e os demais lados mantidos a 0 °C. *Sugestão:* divida este problema em dois, nos quais a temperatura de contorno é 0 em três lados para cada problema.

33. (Problema com valor misto de contorno) Encontre a temperatura estacionária na chapa do Problema 31 com os lados superior e inferior perfeitamente isolados, o lado esquerdo mantido a 0°C e o lado direito mantido a $f(y)$°C.

34. (Radiação) Ache as temperaturas estacionárias no retângulo da Fig. 293 com os lados superior e esquerdo perfeitamente isolados e o lado direito irradiando calor para um meio de acordo com $u_x(a, y) + hu(a, y) = 0$, $h > 0$ constante. (Você obterá muitas soluções, visto que nenhuma solução para o lado inferior é dada.)

35. Encontre fórmulas similares a (17) e (18) para a temperatura no retângulo R mostrado no texto, considerando que o lado inferior de R seja mantido na temperatura $f(x)$ e os demais lados a 0°C.

12.6 Equação do Calor: Solução por Transformadas e Integrais de Fourier

Nossa discussão da equação do calor

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

na última seção também se estende para barras de comprimento infinito, que são bons modelos de barras muito longas ou arames (como, por exemplo, um arame de 300 pés*). Então, o papel da série de Fourier no processo de solução será abordado pelas **Integrais de Fourier** (Seção 11.7).

Ilustremos esse método resolvendo (1) para uma barra que se estende ao infinito em ambos os lados (e que se encontra lateralmente isolada, como antes). Então, não temos condições de contorno, mas somente a **condição inicial**

(2) $$u(x, 0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

onde $f(x)$ é a temperatura inicial dada da barra.

Para resolver este problema, começamos, como na última seção, substituindo $u(x, t)$ por $F(x)G(t)$ em (1). Isto resulta em duas EDOs

(3) $$F'' + p^2F = 0 \qquad \text{[veja (5) da Seção 12.5]}$$

e

(4) $$\dot{G} + c^2p^2G = 0 \qquad \text{[veja (6) da Seção 12.5].}$$

As soluções são

$$F(x) = A \cos px + B \operatorname{sen} px \qquad \text{e} \qquad G(t) = e^{-c^2p^2t},$$

respectivamente, onde A e B são constantes quaisquer. Logo, uma solução de (1) é

(5) $$u(x, t; p) = FG = (A \cos px + B \operatorname{sen} px)e^{-c^2p^2t}.$$

Aqui, tivemos de escolher uma constante de separação k negativa, $k = -p^2$, porque os valores positivos nos levariam a uma função exponencial crescente em (5), o que não tem nenhum significado físico.

Uso das Integrais de Fourier

Quaisquer séries de funções (5), que usualmente encontramos ao tomarmos p como múltiplos de um número fixo, levar-nos-iam a uma função que é periódica em x quando $t = 0$. Entretanto, como em (2) não se supõe que $f(x)$ seja periódica, é natural usar as **Integrais de Fourier** no lugar das séries de Fourier. Além disso, em (5), A e B são arbitrárias, e podemos vê-las como funções de p, escrevendo $A = A(p)$ e $B = B(p)$. Agora, como a equação do calor (1) é linear e homogênea, a função

(6) $$u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t; p)\, dp = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \operatorname{sen} px]\, e^{-c^2p^2t}\, dp$$

é então uma solução de (1), desde que esta integral exista e possa ser derivada duas vezes em relação a x e uma vez em relação a t.

Determinação de $A(p)$ e $B(p)$ a partir da Condição Inicial. De (6) e (2), obtemos

(7) $$u(x, 0) = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \operatorname{sen} px]\, dp = f(x).$$

Isto fornece $A(p)$ e $B(p)$ em termos de $f(x)$; com efeito, de (4) na Seção 11.7, temos

(8) $$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv\, dv, \qquad B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \operatorname{sen} pv\, dv.$$

* 300 pés ≈ 100 metros. (N. T.)

De acordo com (1*) da Seção 11.9, nossa integral de Fourier (7) com estes $A(p)$ e $B(p)$ pode ser escrita como

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos (px - pv)\, dv \right] dp.$$

Similarmente, (6) nesta seção torna-se

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos (px - pv)\, e^{-c^2p^2t}\, dv \right] dp.$$

Supondo que podemos inverter a ordem de integração, obtemos:

(9)
$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \left[\int_0^\infty e^{-c^2p^2t} \cos (px - pv)\, dp \right] dv.$$

Então, podemos avaliar a integral interna usando a fórmula

(10)
$$\int_0^\infty e^{-s^2} \cos 2bs\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2}.$$

[Uma dedução de (10) é dada em Problemas Propostos 16.4 (Projeto de Equipe 28).] Esta assume a forma de nossa integral interna se escolhermos $p = s/(c\sqrt{t})$ como uma nova variável de integração e fizermos

$$b = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}.$$

Então $2bs = (x - v)p$ e $ds = c\sqrt{t}\, dp$, tal que (10) se torna

$$\int_0^\infty e^{-c^2p^2t} \cos (px - pv)\, dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} \exp \left\{ - \frac{(x - v)^2}{4c^2t} \right\}.$$

Inserindo este resultado em (9), obtemos a representação

(11)
$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f(v) \exp \left\{ - \frac{(x - v)^2}{4c^2t} \right\} dv.$$

Considerando $z = (v - x)/(2c\sqrt{t})$ como uma variável de integração, obtemos a forma alternativa

(12)
$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x + 2cz\sqrt{t})\, e^{-z^2}\, dz.$$

Se $f(x)$ é limitada para todos os valores de x e integrável em cada intervalo finito, pode-se mostrar (veja a Ref. [C10]) que a função (11) ou (12) satisfaz (1) e (2). Logo, esta função é a solução desejada no presente caso.

EXEMPLO 1 Temperatura em uma Barra Infinita

Encontre a temperatura numa barra infinita se a temperatura inicial é (Fig. 295)

$$f(x) = \begin{cases} U_0 = const. & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

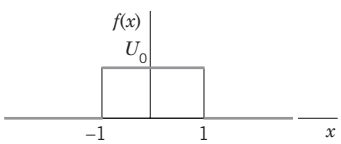


Fig. 295. Temperatura inicial do Exemplo 1

Solução. De (11), temos

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^1 \exp \left\{ - \frac{(x - v)^2}{4c^2t} \right\} dv.$$

Se introduzirmos a variável de integração z, então, a integração em v de –1 a 1 corresponde à integração em z de $(-1 - x)/(2c\sqrt{t})$ a $(1 - x)/(2c\sqrt{t})$, e

(13)
$$u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-(1+x)/(2c\sqrt{t})}^{(1-x)/(2c\sqrt{t})} e^{-z^2}\, dz \qquad (t > 0).$$

Mencionamos que esta integral não é uma função elementar, mas pode ser expressa em termos da função erro, cujos valores foram tabulados. (A Tabela A4 no Apêndice 5 contém alguns valores; tabelas maiores são listadas na Ref. [GR1] do Apêndice 1. Veja também o Projeto de Álgebra Computacional 10, a seguir.) A Fig. 296 mostra $u(x, t)$ para $U_0 = 100°C$, $c^2 = 1$ cm²/s e vários valores de t. ■

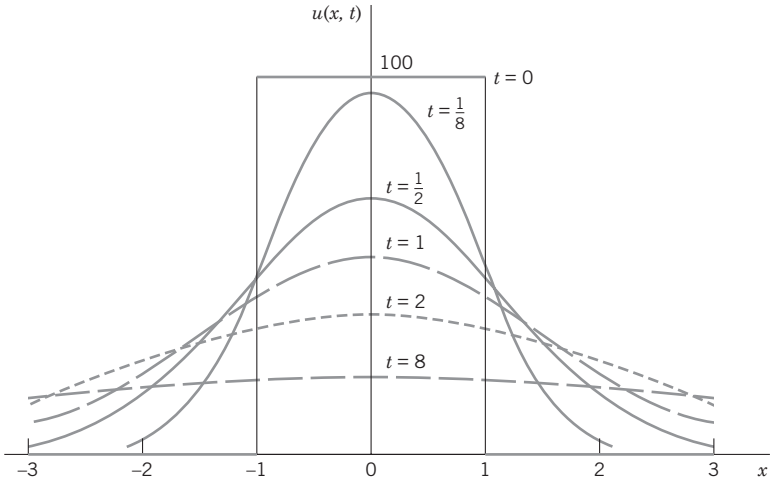


Fig. 296. Solução $u(x, t)$ do Exemplo 1 para $U_0 = 100°C$, $c^2 = 1$ cm²/s e vários valores de t

Uso das Transformadas de Fourier

A transformada de Fourier é intimamente relacionada à integral de Fourier, a qual utilizamos para obter a transformada na Seção 11.9. E a transição para as transformadas de Fourier de senos e cossenos na Seção 11.8 foi ainda mais simples. (Talvez seja bom revisar esse tópico antes de continuar.) Portanto, você não deve se surpreender com o fato de que podemos usar essas transformadas para resolver nosso problema atual ou problemas similares. A transformada de Fourier se aplica a problemas envolvendo a totalidade do eixo, e as transformadas de Fourier de senos e cossenos se aplicam a problemas envolvendo o semi-eixo positivo. Expliquemos esses métodos de transformação por meio de aplicações típicas que se enquadram na discussão que estamos agora fazendo.

EXEMPLO 2 Temperatura em uma Barra Infinita no Exemplo 1

Resolva o Exemplo 1 usando a transformada de Fourier.

Solução. O Problema consiste na equação do calor (1) e na condição inicial (2), que, no exemplo é

$$f(x) = U_0 = const. \text{ se } |x| < 1 \qquad \text{e } 0 \text{ nos demais casos.}$$

Nossa estratégia é considerar a transformada de Fourier em relação a x e então resolver a ED ***ordinária*** resultante em t. Os detalhes disso são os seguintes.

Façamos $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$ representar a transformada de Fourier de u, ***vista como uma função de x***. De (10) da Seção 11.9, vemos que a equação do calor (1) fornece

$$\mathcal{F}(u_t) = c^2\mathcal{F}(u_{xx}) = c^2(-w^2)\mathcal{F}(u) = -c^2w^2\hat{u}.$$

No lado esquerdo, supondo que possamos trocar a ordem de derivação e integração, temos

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iwx}\, dx = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c^2w^2\hat{u}.$$

Como esta equação envolve somente uma derivada em relação a t, mas nenhuma derivada em relação a w, trata-se de uma ***ED ordinária*** de primeira ordem, tendo t como variável independente e w como um parâmetro. Pela separação de variáveis (Seção 1.3), temos a solução geral

$$\hat{u}(w, t) = C(w)e^{-c^2w^2t}$$

com a "constante" arbitrária $C(w)$ dependente do parâmetro w. A condição inicial (2) fornece a relação $\hat{u}(w, 0) = C(w) = \hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$. Nosso resultado intermediário é

$$\hat{u}(w, t) = \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}.$$

A fórmula de inversão (7) da Seção 11.9 agora dá a solução

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}e^{iwx}\, dw. \tag{14}$$

Nesta solução, podemos inserir a transformada de Fourier

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ivw}\, dv.$$

Supondo que podemos inverter a ordem de integração, obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2w^2t} e^{i(wx - wv)}\, dw \right] dv.$$

Pela fórmula de Euler (3) da Seção 11.9, o integrando da integral mais interna é igual a

$$e^{-c^2w^2t} \cos(wx - wv) + ie^{-c^2w^2t} \operatorname{sen}(wx - wv).$$

Vemos que sua parte imaginária é uma função ímpar de w, de modo que sua intergral é 0. (Mais precisamente, esta é a parte principal da integral; veja a Seção 16.4.) A parte real é uma função par de w, de modo que sua integral de $-\infty$ a ∞ é igual a duas vezes a integral de 0 a ∞:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_{0}^{\infty} e^{-c^2w^2t} \cos(wx - wv)\, dw \right] dv.$$

Isto concorda com (9) (com $p = w$) e leva às outras fórmulas (11) e (13). ■

EXEMPLO 3 **Solução do Exemplo 1 pelo Método da Convolução**

Resolva o problema do calor do Exemplo 1 pelo método da convolução.

Solução. O início é como no Exemplo 2 e leva a (14), isto é,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2w^2t} e^{iwx}\, dw. \tag{15}$$

Agora vem a idéia crucial. Reconhecemos que esta expressão tem a forma (13) da Seção 11.9, ou seja,

$$u(x, t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w) e^{iwx}\, dw \tag{16}$$

na qual

$$\hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2w^2t}. \tag{17}$$

Como, por definição, a convolução [(11), Seção 11.9],

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x - p)\, dp, \tag{18}$$

como nosso próximo e último passo, devemos determinar a transformada inversa de Fourier g de $\hat{g}$. Para isto, podemos usar a fórmula 9 na Tabela III da Seção 11.10,

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}$$

com um valor apropriado de a. Com $c^2t = 1/(4a)$ ou $a = 1/(4c^2t)$, usando (17), obtemos

$$\mathcal{F}(e^{-x^2/(4c^2t)}) = \sqrt{2c^2t}\, e^{-c^2w^2t} = \sqrt{2c^2t}\, \sqrt{2\pi}\, \hat{g}(w).$$

Logo, $\hat{g}$ tem a inversa

$$\frac{1}{\sqrt{2c^2t}\, \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(4c^2t)}.$$

Substituindo x por $x - p$ e levando o resultado a (18), temos finalmente

$$u(x, t) = (f * g)(x) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \exp\left\{ -\frac{(x - p)^2}{4c^2t} \right\} dp. \tag{19}$$

Esta fórmula de solução de nosso problema concorda com (11). Escrevemos $(f*g)(x)$ sem apontar o parâmetro t em relação ao qual não integramos. ■

EXEMPLO 4 **Transformada de Fourier do Seno Aplicada à Equação do Calor**

Se uma barra lateralmente isolada se estende de $x = 0$ ao infinito, podemos usar uma transformada de Fourier de senos. Fazemos com que a temperatura inicial seja $u(x, 0) = f(x)$ e impomos a condição de contorno $u(0, t) = 0$. Então, da equação do calor e de (9) da Seção 11.8, uma vez que $f(0) = u(0, 0) = 0$, obtemos

$$\mathcal{F}_s(u_t) = \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} = c^2 \mathcal{F}_s(u_{xx}) = -c^2w^2 \mathcal{F}_s(u) = -c^2w^2 \hat{u}_s(w, t).$$

Esta é uma EDO de primeira ordem $\partial \hat{u}_s/\partial t + c^2w^2\hat{u}_s = 0$. Sua solução é

$$\hat{u}_s(w, t) = C(w) e^{-c^2w^2t}.$$

Da condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, temos $\hat{u}_s(w, 0) = \hat{f}_s(w) = C(w)$. Logo

$$\hat{u}_s(w, t) = \hat{f}_s(w) e^{-c^2 w^2 t}.$$

Pegando-se a transformada inversa de Fourier de senos e substituindo

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(p) \operatorname{sen} wp \, dp$$

à direita obtemos a fórmula de solução

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(p) \operatorname{sen} wp \, e^{-c^2 w^2 t} \operatorname{sen} wx \, dp \, dw. \tag{20}$$

A Fig. 297 mostra (20) com $c = 1$ para $f(x) = 1$ se $0 \leqq x \leqq 1$ e 0 nos demais casos, plotada sobre o plano xt para $0 \leqq x \leqq 2$ e $0{,}01 \leqq t \leqq 1{,}5$. Note que as curvas de $u(x, t)$ para t constante parecem-se com as da Fig. 296 anteriormente apresentada. ■

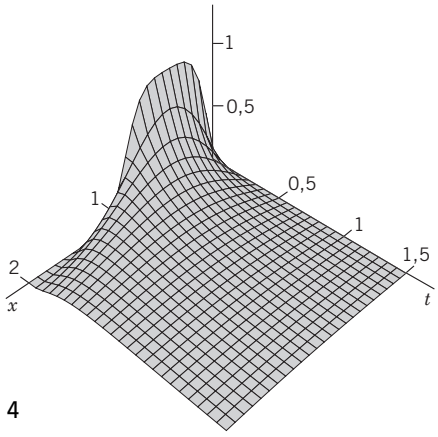


Fig. 297. Solução (20) do Exemplo 4

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.6

1–7 SOLUÇÃO EM FORMA DE INTEGRAL

Usando (6), obtenha a solução de (1) na forma de integral satisfazendo à condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ onde:

1. $f(x) = 1$ se $|x| < a$ e 0 nos demais casos

2. $f(x) = e^{-k|x|}$ $(k > 0)$

3. $f(x) = 1/(1 + x^2)$. [Use (15) da Seção 11.7.]

4. $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. [Use o Problema 4 da Seção 11.7.]

5. $f(x) = (\operatorname{sen} \pi x)/x$. [Use o Problema 4 da Seção 11.7.]

6. $f(x) = x$ se $|x| < 1$ e 0 nos demais casos

7. $f(x) = |x|$ se $|x| < 1$ e 0 nos demais casos.

8. Verifique que, no Problema 5, u satisfaz à condição inicial.

9. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Fluxo de Calor. (a) Represente o gráfico fundamental da Fig. 296.

(b) Em (a), aplique animação para "ver" o fluxo de calor em termos de decréscimo de temperatura.

(c) Represente graficamente $u(x, t)$ com $c = 1$ como uma superfície sobre a metade superior do semiplano xt.

10. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Função Erro (erf)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} \, dw \tag{21}$$

Esta função é importante em matemática e física aplicadas (teoria da probabilidade e estatística, termodinâmica etc.) e enquadra-se em nossa discussão atual. Olhando-a como um caso típico de uma função especial definida por uma integral que não pode ser calculada, como se faz no cálculo elementar, faça o seguinte.

(a) Esboce ou represente graficamente a curva em **forma de sino** [a curva do integrando em (21)]. Mostre que erf x é ímpar. Mostre que

$$\int_a^b e^{-w^2} \, dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a),$$

$$\int_{-b}^b e^{-w^2} \, dw = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} b.$$

(b) Obtenha a série de Maclaurin de erf x a partir da série para o integrando. Use essa série para calcular uma tabela para erf x para $x = 0(0{,}01)3$ (significando $x = 0; 0{,}01; 0{,}02; \cdots;3$).

(c) Obtenha os valores requeridos em (b) por meio de um comando de integração no seu sistema de álgebra computacional. Compare a precisão.

(d) Pode-se mostrar que $\operatorname{erf}(\infty) = 1$. Confirme esse fato experimentalmente calculando erf x para grandes valores de x.

(e) Considere que $f(x) = 0$ quando $x > 0$ e 0 quando $x < 0$. Usando $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, mostre que (12) então fornece

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2c\sqrt{t})}^\infty e^{-z^2} \, dz$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(- \frac{x}{2c\sqrt{t}} \right) \qquad (t > 0).$$

(f) Expresse a temperatura (13) em termos da função erro.

(g) Mostre que $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} \, ds$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Aqui, a integral é a definição da "função de distribuição da distribuição normal" a ser discutida na Seção 24.8.

12.7 Modelagem: Membrana, Equação da Onda Bidimensional

A corda vibrante na Seção 12.2 é um problema vibracional básico de uma dimensão. Igualmente importante é o seu análogo bidimensional, isto é, o movimento de uma membrana elástica, como o couro de um tambor que é esticado e então fixado ao longo da borda do instrumento. Com efeito, para determinarmos esse modelo, procederemos quase do mesmo modo que na Seção 12.2.

Suposições Físicas

1. A massa da membrana por unidade de área é constante ("membrana homogênea"). A membrana é perfeitamente flexível e não oferece resistência ao dobramento.
2. A membrana é esticada e então fixada ao longo de todo o seu contorno no plano xy. A tensão por unidade de comprimento T causada pelo estiramento da membrana é a mesma em todos os pontos e em todas as direções, e não se modifica durante o movimento.
3. A deflexão $u(x, t)$ da membrana durante o movimento é pequena se comparada ao tamanho da membrana, e todos os ângulos de inclinação são pequenos.

Ainda que tais suposições não se verifiquem exatamente na realidade, elas são relativamente precisas para pequenas vibrações transversas de uma fina membrana elástica, de modo que obteremos um bom modelo, por exemplo, para um couro de tambor.

Dedução da EDP do Modelo ("Equação da Onda Bidimensional") a partir de Forças. Como na Seção 12.2, o modelo consistirá em uma EDP e condições adicionais. A EDP será obtida pelo mesmo método da Seção 12.2, a saber, considerando as forças atuantes numa pequena porção do sistema físico, a membrana da Fig. 298, à medida que ela se move para cima e para baixo.

Como as deflexões da membrana e os ângulos de inclinação são pequenos, os lados da porção são aproximadamente iguais a Δx e Δy. A tensão T é a força por unidade de comprimento. Portanto, as forças atuantes nos lados da porção são aproximadamente $T\,\Delta x$ e $T\,\Delta y$. Como a membrana é perfeitamente flexível, estas forças são tangentes à membrana a cada instante, à medida que ela se move.

Componentes Horizontais das Forças. Primeiramente consideremos as componentes horizontais das forças. Estas componentes são obtidas multiplicando-se as forças pelos cossenos dos ângulos de inclinação. Uma vez que estes ângulos são pequenos, seus cossenos estão próximos de 1. Logo, as componentes horizontais das forças nos lados opostos são aproximadamente iguais. Portanto, o movimento das partículas da membrana numa direção horizontal será desprezivelmente pequeno. Então, concluímos que podemos considerar o movimento da membrana como transversal; ou seja, cada partícula move-se verticalmente.

Componentes Horizontais das Forças. Estas componentes ao longo dos lados direito e esquerdo (Fig. 298) são, respectivamente:

$$T\,\Delta y \text{ sen } \beta \qquad \text{e} \qquad -T\,\Delta y \text{ sen } \alpha.$$

Aqui, α e β são os valores do ângulo de inclinação (que varia ligeiramente ao longo das bordas), e o sinal negativo aparece porque a força no lado esquerdo está dirigida para baixo. Como os ângulos são pequenos, podemos substituir seus senos por suas tangentes. Portanto, a resultante destas duas componentes verticais é apresentada por (1) na página seguinte.

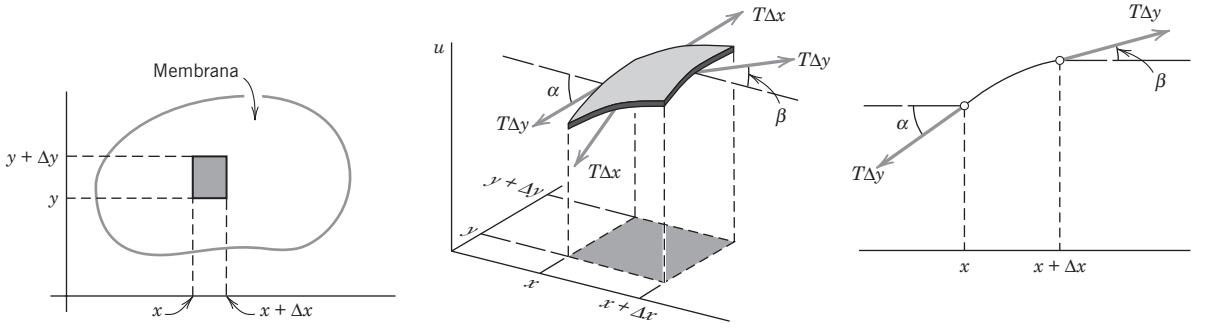


Fig. 298. Membrana vibrante

$$T\,\Delta y\,(\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha) \approx T\,\Delta y\,(\tan\beta - \tan\alpha) = T\,\Delta y\,[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \tag{1}$$

onde os subscritos de x indicam derivadas parciais e y_1 e y_2 são valores ente y e $y + \Delta y$. Similarmente, a resultante das componentes verticais das forças atuando nos outros dois lados da porção é

$$T\,\Delta x\,[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)] \tag{2}$$

na qual x_1 e x_2 são valores entre x e $x + \Delta x$.

A Segunda Lei de Newton Fornece a EDP do Modelo. Pela segunda lei de Newton (veja a Seção 2.4), a soma das forças dadas por (1) e (2) é igual à massa $\rho\,\Delta A$ dessa pequena porção multiplicada pela aceleração $\partial^2 u/\partial t^2$; aqui, ρ é a massa da membrana não-defletida por unidade de área e $\Delta A = \Delta x\,\Delta y$ é a área dessa porção quando ela não está defletida. Portanto,

$$\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\,\Delta y\,[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\,\Delta x\,[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

em que a derivada no lado esquerdo é calculada em algum ponto apropriado $(\tilde{x}, \tilde{y})$ correspondente àquela porção. A divisão por $\rho\,\Delta x\,\Delta y$ fornece

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right].$$

Se fizermos Δx e Δy se aproximarem de zero, obtemos a EDP do modelo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{3}$$

Esta EDP é chamada de **equação da onda bidimensional**. A expressão entre parênteses é o laplaciano $\nabla^2 u$ de u (Seção 10.8). Portanto, (3) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u. \tag{3′}$$

Soluções da equação da onda (3) serão discutidas e obtidas na próxima seção.

12.8 Membrana Retangular. Série de Fourier Dupla

O modelo da membrana vibrante para se obter o deslocamento $u(x, y, t)$ de um ponto (x, y) da membrana, do repouso ($u = 0$) no tempo t é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$u = 0 \text{ no contorno} \tag{2}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \tag{3a}$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y). \tag{3b}$$

Aqui (1) é a **equação da onda bidimensional** com $c^2 = T/\rho$ que acabamos de deduzir, (2) é a **condição de contorno** (membrana presa ao longo do contorno no plano xy para todos os instantes $t \geqq 0$), e (3) são as **condições iniciais** em $t = 0$ consistindo em um *deslocamento inicial* dado (forma inicial) $f(x, y)$ e a *velocidade inicial* dada $g(x, y)$, onde $u_t = \partial u/\partial t$. Vemos que estas condições são bastantes similares àquelas para a corda da Seção 12.2.

Um primeiro modelo de importância que consideraremos é a **membrana retangular** R da Fig. 299, cujo estudo é mais simples que o do tampo circular do tambor. Neste modelo, o contorno em (2) é o retângulo da Fig. 299. Resolveremos este problema em três passos:

Passo 1. Por separação de variáveis, fazendo $u(x, y, t) = F(x, y)\, G(t)$, e a seguir, $F(x, y) = H(x)\, Q(y)$, de (1) obtemos uma EDO (4) para G; depois, de uma EDP (5), para F, obtemos duas EDOs (6) e (7) para H e Q.
Passo 2. A partir das soluções destas EDOs, determinamos as soluções (13) de (1) (**"autofunções"** u_{mn}) que satisfazem a condição de contorno (2).
Passo 3. Compomos os valores de u_{mn} na forma de uma série dupla (14), resolvendo todo o modelo (1), (2), (3).

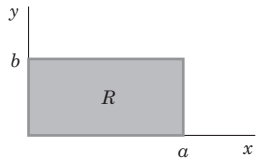


Fig. 299. Membrana retangular

Passo 1. Três EDOs a Partir da Equação da Onda (1)

Para obtermos as EDOs a partir de (1), aplicamos sucessivamente duas separações de variáveis. Na primeira, fazemos $u(x, y, t) = F(x, y)\, G(t)$. A substituição em (1) fornece:

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

na qual os subscritos representam as derivadas parciais e os pontos simbolizam derivadas em relação a t. Para separarmos as variáveis, dividimos ambos os lados por c^2FG:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}\,(F_{xx} + F_{yy}).$$

Como o lado esquerdo depende somente de t, ao passo que o lado direito é independente de t, ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Por uma simples investigação vemos que apenas valores negativos dessa constante produzirão soluções que satisfazem (2) sem ser identicamente nulas; isto é similar à Seção 12.3. Representando essa constante negativa por $-\nu^2$, temos:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}\,(F_{xx} + F_{yy}) = -\nu^2.$$

Isto nos dá duas equações: para a **"função tempo"** $G(t)$, temos a EDO

(4) $$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad \text{onde } \lambda = c\nu,$$

e, para a **"função amplitude"** $F(x, y)$, uma EDP chamada de **equação** *bidimensional* **de Helmholtz**[3]

(5) $$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0.$$

A separação da equação de Helmholtz é obtida se fizermos $F(x, y) = H(x)Q(y)$. Por substituição desta em (5), obtemos

$$\frac{d^2H}{dx^2}\,Q = -\left(H\,\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 HQ\right).$$

Para separarmos as variáveis, dividimos ambos os lados por HQ, encontrando

$$\frac{1}{H}\,\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 Q\right).$$

Ambos os lados devem ser iguais a uma constante pelo motivo usual. Esta constante deve ser negativa, digamos, $-k^2$, pois somente valores negativos vão nos levar a soluções que satisfaçam (2) sem serem identicamente nulas. Logo,

$$\frac{1}{H}\,\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 Q\right) = -k^2.$$

[3] HERMANN VON HELMHOLTZ (1821–1894), físico alemão conhecido por seus trabalhos fundamentais em termodinâmica, escoamento de fluidos e acústica.

Isto produz duas EDOs para H e Q, a saber:

(6) $$\frac{d^2H}{dx^2} + k^2H = 0$$

e

(7) $$\frac{d^2Q}{dy^2} + p^2Q = 0 \qquad \text{onde } p^2 = \nu^2 - k^2.$$

Passo 2. Satisfazendo a Condição de Contorno

As soluções de (6) e (7) são

$$H(x) = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx \qquad \text{e} \qquad Q(y) = C\cos py + D\,\text{sen}\,py$$

com A, B, C e D constantes. De $u = FG$ e (2), segue-se que $F = HQ$ deve ser nula sobre o contorno, ou seja, nas bordas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$; veja a Fig. 299. Isto nos fornece as condições:

$$H(0) = 0, \qquad H(a) = 0, \qquad Q(0) = 0, \qquad Q(b) = 0.$$

Portanto, $H(0) = A = 0$ e então $H(a) = B\,\text{sen}\,ka = 0$. Aqui, devemos fazer $B \neq 0$, visto que, de outra forma, $H(x) \equiv 0$ e $F(x, y) \equiv 0$. Logo, $\text{sen}\,ka = 0$ ou $ka = m\pi$, isto é,

$$K = \frac{m\pi}{a} \ (m \text{ inteiro}).$$

Precisamente da mesma forma, concluímos que $C = 0$ e que p deve se restringir a valores $p = n\pi/b$ quando n for um número inteiro. Portanto, obtemos as soluções $H = H_m$, $Q = Q_n$, onde

$$H_m(x) = \text{sen}\,\frac{m\pi x}{a} \qquad \text{e} \qquad Q_n(y) = \text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\,, \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, \cdots, \\ n = 1, 2, \cdots. \end{matrix}$$

Como no caso da corda vibrante, não é necessário considerarmos m, $n = -1, -2, \cdots$, visto que as soluções correspondentes são essencialmente as mesmas que para os valores positivos de m e n, exceto por um fator -1. Logo, as funções

(8) $$F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \text{sen}\,\frac{m\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\,, \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, \cdots, \\ n = 1, 2, \cdots, \end{matrix}$$

são soluções da equação de Helmholtz (5) que se anulam no contorno de nossa membrana.

Autofunções e Autovalores. Após termos nos concentrado em (5), passemos agora para (4). Como, em (7), $p^2 = \nu^2 - k^2$ e, em (4), $\lambda = c\nu$, temos

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}.$$

Portanto, a $k = m\pi/a$ e $p = n\pi/b$, corresponde o valor

(9) $$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\,, \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, \cdots, \\ n = 1, 2, \cdots, \end{matrix}$$

na EDO (4). Uma solução geral correspondente de (4) é:

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\,\text{sen}\,\lambda_{mn}t.$$

Segue-se que as funções $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$ escritas

(10) $$u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\,\text{sen}\,\lambda_{mn}t)\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}$$

com λ_{mn} conforme (9), são soluções da equação da onda (1) que valem zero no contorno da membrana retangular da Fig. 299. Essas funções são chamadas de **autofunções** ou *funções características*, e os números λ_{mn} são chamados de **autovalores** ou *valores característicos* da membrana vibrante. A freqüência de u_{mn} é $\lambda_{mn}/2\pi$.

Discussão das Autofunções. É muito interessante o fato de que, dependendo de a e b, diversas funções F_{mn} podem corresponder aos mesmos autovalores. Fisicamente, isto significa que podem existir vibrações com a mesma freqüência, porém com **linhas nodais** (curvas de pontos na membrana que não se movem) inteiramente diferentes. Ilustremos isso com o seguinte exemplo.

EXEMPLO 1 Autovalores e Autofunções da Membrana Quadrada

Considere a membrana quadrada com $a = b = 1$. De (9), obtemos seus autovalores

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2}. \tag{11}$$

Portanto, $\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$ mas, para $m \neq n$, as funções correspondentes

$$F_{mn} = \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \qquad \text{e} \qquad F_{nm} = \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi y$$

são certamente diferentes. Por exemplo, a $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$, correspondem as duas funções

$$F_{12} = \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} 2\pi y \qquad \text{e} \qquad F_{21} = \operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen} \pi y.$$

Então, as soluções correspondentes

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^* \operatorname{sen} c\pi\sqrt{5}t)F_{12} \qquad \text{e} \qquad u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^* \operatorname{sen} c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$

possuem as linhas nodais $y = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$, respectivamente (veja a Fig. 300). Fazendo $B_{12} = 1$ e $B_{12}^* = B_{21}^* = 0$, obtemos:

$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t\,(F_{12} + B_{21}F_{21}) \tag{12}$$

que representa outra vibração correspondente ao autovalor $c\pi\sqrt{5}$. A linha nodal desta função é a solução da equação

$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} 2\pi y + B_{21} \operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen} \pi y = 0$$

ou, como $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$,

$$\operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y\,(\cos \pi y + B_{21} \cos \pi x) = 0. \tag{13}$$

Esta solução depende do valor de B_{21} (veja a Fig. 301).

De (11), vemos que mais de duas funções podem corresponder ao mesmo valor numérico de λ_{mn}. Por exemplo, as quatro funções F_{18}, F_{81}, F_{47} e F_{74} correspondem ao valor

$$\lambda_{18} = \lambda_{81} = \lambda_{47} = \lambda_{74} = c\pi\sqrt{65} \qquad \text{porque} \qquad 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65.$$

Isto acontece porque é possível expressar de várias maneiras 65 como a soma dos quadrados de dois números positivos. Segundo o teorema de Gauss, este é o caso para cada soma de dois quadrados entre cujos fatores primos existem ao menos dois diferentes com a forma $4n + 1$, onde n é um número positivo e inteiro. Em nosso caso, temos $65 = 5 \times 13 = (4 + 1)(12 + 1)$. ■

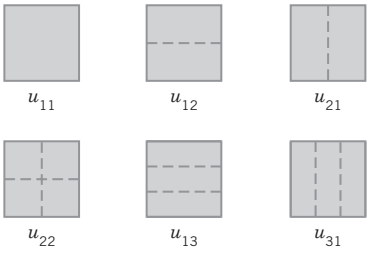


Fig. 300. Linhas nodais das soluções u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{13}, u_{31} no caso da membrana quadrada

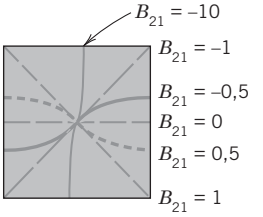


Fig. 301. Linhas nodais da solução (12) para alguns valores de B_{21}

Passo 3. Solução do Modelo (1), (2), (3). Série de Fourier Dupla

Até agora, nossas soluções (10) satisfazem somente (1) e (2). Para obtermos a solução que também satisfaça (3), procederemos como na Seção 12.3. Consideremos a série dupla

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \operatorname{sen} \lambda_{mn}t) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \tag{14}$$

(sem discutirmos convergência e singularidade). De (14) e (3a), fazendo $t = 0$, temos

(15)
$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = f(x, y).$$

Suponha que $f(x, y)$ possa ser representada por (15). (Uma condição suficiente para isto é haver a continuidade de f, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial^2 f/\partial x \partial y$ em R.) Então, (15) é chamada de **série de Fourier dupla** de $f(x, y)$. Seus coeficientes podem ser determinados da seguinte maneira. Fazendo

(16)
$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

podemos escrever (15) na forma

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}.$$

Para y fixo, esta é a série senoidal de Fourier de $f(x, y)$, considerada como uma função de x. De (4) da Seção 11.3, vemos que os coeficientes desta expansão são

(17)
$$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \, dx.$$

Além disso, (16) é a série senoidal de Fourier de $K_m(y)$ e, de (4) da Seção 11.3, segue-se que seus coeficientes são

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \, dy.$$

Disso e de (17), obtemos a **fórmula generalizada de Euler**

(18)
$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, \cdots \\ n = 1, 2, \cdots \end{matrix}$$

para os **coeficientes de Fourier** de $f(x, y)$ na série de Fourier dupla (15).

Os B_{mn} em (14) são agora determinados em termos de $f(x, y)$. Para determinarmos os B_{mn}^*, derivamos termo a termo (14) em relação a t; utilizando (3b), obtemos

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^* \lambda_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = g(x, y).$$

Suponha que se possa expandir $g(x, y)$ nessa série de Fourier dupla. Então, procedendo como antes, descobrimos que os coeficientes são

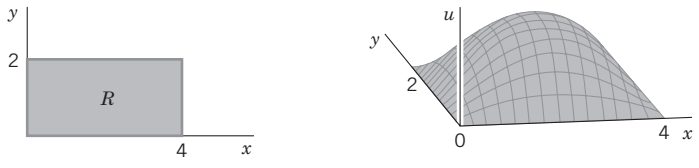
(19)
$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, \cdots \\ n = 1, 2, \cdots. \end{matrix}$$

Resultado. *Se, em* (3), *f e g são tais que u possa ser expressa por* (14), *então* (14) *com os coeficientes* (18) *e* (19) *é a solução do modelo* (1), (2), (3).

EXEMPLO 2 Vibração de uma Membrana Retangular

Encontre a vibração de uma membrana retangular de lados $a = 4$ ft* e $b = 2$ ft (Fig. 302) se a tensão é de 12,5 lb/ft, a massa específica de 2,5 slugs/ft² **(como para a borracha leve), a velocidade inicial é nula e o deslocamento inicial é dado por

(20)
$$f(x, y) = 0{,}1(4x - x^2)(2y - y^2) \text{ ft}.$$



Membrana Deslocamento inicial

Fig. 302. Exemplo 2

*ft: abreviatura de *foot/feet*: pé/pés (1 ft = 33 cm, aproximadamente). (N. T.)

**Slug: unidade de massa do sistema britânico, correspondente à massa à qual uma força de intensidade de uma libra consegue imprimir uma aceleração de 1 ft/s² (1 slug = 14,6 kg, aproximadamente). (N. T.)

Solução. $c^2 = T/p = 12{,}5/2{,}5 = 5[\text{ft}^2/\text{s}^2]$. Também, de (19), $B_{mn}^* = 0$. De (18) e (20),

$$B_{mn} = \frac{4}{4 \cdot 2} \int_0^2 \int_0^4 0{,}1(4x - x^2)(2y - y^2) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{20} \int_0^4 (4x - x^2) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{4} \, dx \int_0^2 (2y - y^2) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \, dy.$$

Duas integrações por partes dão para a primeira integral à direita

$$\frac{128}{m^3\pi^3} \left[1 - (-1)^m\right] = \frac{256}{m^3\pi^3} \quad (m \text{ ímpar})$$

e, para a segunda,

$$\frac{16}{n^3\pi^3} \left[1 - (-1)^n\right] = \frac{32}{n^3\pi^3} \quad (n \text{ ímpar}).$$

Para m ou n par, obtemos 0. Juntando com o fator 1/20, temos então que $B_{mn} = 0$ se m ou n for par e

$$B_{mn} = \frac{256 \cdot 32}{20m^3n^3\pi^6} \approx \frac{0{,}426\,050}{m^3n^3} \qquad (m \text{ e } n \text{ ambos ímpares}).$$

Disto, de (9) e (14), obtemos a resposta

$$u(x, y, t) = 0{,}426\,050 \sum_{m,n \text{ ímpar}} \sum \frac{1}{m^3n^3} \cos \left(\frac{\sqrt{5}\pi}{4} \sqrt{m^2 + 4n^2} \right) t \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}$$

$$(21) \qquad = 0{,}426\,050 \left(\cos \frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{5}}{4} t \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2} + \frac{1}{27} \cos \frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{37}}{4} t \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi y}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{27} \cos \frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{13}}{4} t \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2} + \frac{1}{729} \cos \frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{45}}{4} t \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi y}{2} + \cdots \right).$$

Para discutirmos esta solução, notamos que o primeiro termo é muito similar ao formato inicial da membrana, não apresenta linhas nodais e é de longe o termo dominante, visto que os coeficientes dos próximos termos são muito menores. O segundo termo tem duas linhas nodais horizontais ($y = 2/3, 4/3$), o terceiro, duas linhas verticais ($x = 4/3, 8/3$), o quarto tem duas horizontais e duas verticais, e assim por diante. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.8

1. (Freqüência) Como a freqüência das autofunções da membrana retangular se altera se: (a) duplicarmos a tensão, (b) tomarmos uma membrana com a metade da massa da membrana original? (Justifique.)

MEMBRANA QUADRADA

2. Determine e esboce as linhas nodais das autofunções da membrana quadrada para $m = 1, 2, 3, 4$ e $n = 1, 2, 3, 4$.

3–8 **Série de Fourier Dupla.** Represente $f(x, y)$ por uma série (15), onde $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

3. $f(x, y) = 1$

4. $f(x, y) = x$

5. $f(x, y) = y$

6. $f(x, y) = x + y$

7. $f(x, y) = xy$

8. $f(x, y) = xy(1 - x)(1 - y)$

9. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Série de Fourier Dupla. (a) Escreva um programa que forneça e esboce graficamente as somas parciais de (15). Aplique-o aos Problemas 4 e 5. Os gráficos mostram que essas somas parciais satisfazem à condição de contorno (3a)? Explique por quê. Por que a convergência é rápida?

(b) Refaça o item (a) para o Problema 3. Faça o gráfico de uma porção, digamos, $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$, de várias somas parciais, usando os mesmos eixos para ver como elas se diferem. (Veja a Fig. 303.)

(c) Repita o item (b) para funções de sua escolha.

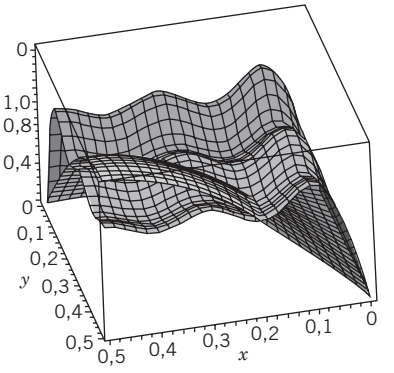


Fig. 303. Somas parciais $S_{2,2}$ e $S_{10,10}$ no Projeto de Álgebra Computacinal 9b

10. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Quádruplos de F_{mn}. Escreva um programa que lhe forneça, no Exemplo 1, quatro valores λ_{mn} numericamente iguais, de modo que quatro diferentes F_{mn} lhe sejam correspondentes. Esboce as linhas nodais de F_{18}, F_{81}, F_{47}, F_{74} no Exemplo 1 e faça algo similar para outros valores de F_{mn} que você encontrará.

11–13 **Deflexão.** Encontre a deflexão $u(x, y, t)$ da membrana quadrada de lado π e $c^2 = 1$, considerando que a velocidade inicial é nula e que a deflexão inicial é

11. k sen $2x$ sen $5y$

12. 0,1 sen x sen y

13. $0{,}1xy(\pi - x)(\pi - y)$

MEMBRANA RETANGULAR

14. Verifique a discussão dos termos de (21) no Exemplo 2.

15. Refaça o Problema 2 para $a = 4$ e $b = 1$.

16. Verifique o cálculo de B_{mn} no Exemplo 2 usando a integração por partes.

17. Encontre os autovalores da membrana retangular de lados $a = 2$ e $b = 1$ aos quais correspondam duas ou mais autofunções diferentes (independentes).

18. (Valor mínimo) Mostre que, entre todas as membranas retangulares de uma mesma área $A = ab$ e com o mesmo c, a membrana quadrada é aquela para a qual u_{11} [veja (10)] tem a menor freqüência.

19–22 Série de Fourier Dupla. Represente $f(x, y)$ ($0 < x < a$, $0 < y < b$) por uma série de Fourier dupla (15).

19. $f(x, y) = k$

20. $f(x, y) = 0{,}25xy$

21. $f(x, y) = xy(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$

22. $f(x, y) = xy(a - x)(b - y)$

23. (Deflexão) Encontre a deflexão da membrana de lados a e b com $c^2 = 1$ para a deflexão inicial $f(x, y) = \text{sen}\,\dfrac{3\pi x}{a}\,\text{sen}\,\dfrac{4\pi y}{b}$ e velocidade inicial nula.

24. Repita o Problema 23 com $c^2 = 1$, para $f(x, y)$ dada como no Problema 22 e uma velocidade inicial nula.

25. (Vibrações forçadas) Mostre que as vibrações forçadas de uma membrana são modeladas pela EDP $u_{tt} = c^2\nabla^2 u + P/\rho$, onde $P(x, y, t)$ é a força externa por unidade de área atuando perpendicularmente ao plano xy.

12.9 Laplaciano em Coordenadas Polares. Membrana Circular. Série de Fourier-Bessel

Em problemas de valores de contorno para EDPs, é um ***princípio geral*** o uso de coordenadas polares, que simplificam ao máximo a fórmula para o contorno. Como desejamos discutir membranas circulares (tampos de tambores), primeiro faremos uma transformação do laplaciano da equação da onda (1), na Seção 12.8,

$$u_{tt} = c^2\nabla^2 u = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{1}$$

(com os subscritos simbolizando as derivadas parciais) para as **coordenadas polares**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Portanto, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Pela regra da cadeia (Seção 9.6), obtemos

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x.$$

Derivando mais uma vez em relação a x, usando a regra do produto e de novo a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\ &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\ &= (u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x + u_\theta \theta_{xx}. \end{aligned} \tag{2}$$

Também, derivando r e θ, encontramos

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \qquad \theta_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}.$$

Derivando essas duas fórmulas novamente, obtemos

$$r_{xx} = \frac{r - xr_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \qquad \theta_{xx} = -y\left(-\frac{2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^4}.$$

Substituamos todas estas expressões em (2). Admitindo a continuidade da primeira e da segunda derivada parcial, temos que $u_{r\theta} = u_{\theta r}$, e, simplificando,

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2\frac{xy}{r^4} u_\theta. \tag{3}$$

De modo semelhante, segue-se que

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - 2\frac{xy}{r^4} u_\theta. \tag{4}$$

Somando (3) e (4), vemos que o **laplaciano de *u* em coordenadas polares** é

(5) $$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Membrana Circular

Membranas circulares ocorrem em tampos de tambores, bombas hidráulicas, microfones, telefones e assim por diante, e isso evidencia sua grande importância em engenharia. Sempre que uma membrana circular for plana e seu material for elástico, porém sem oferecer resistência ao dobramento (o que exclui as membranas metálicas finas!), suas vibrações são modeladas pelas **equações de onda bidimensionais em coordenadas polares** obtidas de (1) com $\nabla^2 u$ dada por (5), ou seja:

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Consideremos uma membrana de raio R (Fig. 304) e determinemos soluções $u(r, t)$ que sejam radialmente simétricas. (As soluções também dependentes do ângulo θ serão discutidas nos problemas propostos.) Então, $u_{\theta\theta} = 0$ em (6) e o modelo do problema (o análogo de (1), (2) (3) na Seção 12.8) é

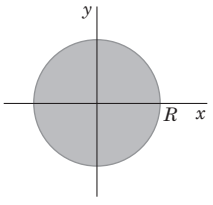


Fig. 304. Membrana circular

(7) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

(8) $$u(R, t) = 0 \text{ para todos } t \geqq 0$$

(9a) $$u(r, 0) = f(r)$$

(9b) $$u_t(r, 0) = g(r).$$

Aqui, (8) significa que a membrana está presa ao longo do círculo de contorno $r = R$. A deflexão inicial $f(r)$ e a velocidade inicial $g(r)$ dependem somente de r, e não de θ, de modo que podemos esperar soluções $u(r, t)$ radialmente simétricas.

Passo 1. Duas EDOs a Partir da Equação da Onda (7). Equação de Bessel

Usando o **método de separação de variáveis**, primeiro determinamos soluções $u(r, t) = W(r)G(t)$. (Escrevemos W, e não F, porque W depende de r, enquanto F, usado antes, dependia de x.)

Substituindo $u = WG$ e suas derivadas em (7) e dividindo o resultado por c^2WG, obtemos

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W}\left(W'' + \frac{1}{r}W'\right)$$

em que os pontos representam as derivadas em relação a t e as aspas representam as derivadas em relação a r. As expressões em ambos os lados devem ser iguais a uma constante, a qual deve ser negativa, digamos $-k^2$, para que obtenhamos soluções que satisfaçam as condições de contorno e que não sejam identicamente nulas. Portanto,

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W}\left(W'' + \frac{1}{r}W'\right) = -k^2.$$

Isto fornece as duas EDOs lineares

(10) $$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad \text{onde } \lambda = ck$$

e

(11) $$W'' + \frac{1}{r}W' + k^2 W = 0.$$

Podemos reduzir (11) à equação de Bessel (Seção 5.5) se fizermos $s = kr$. Então, $1/r = k/s$ e, mantendo a notação W por simplicidade, obtemos, pela regra da cadeia,

$$W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds}\,k \qquad \text{e} \qquad W'' = \frac{d^2W}{ds^2}\,k^2.$$

Substituindo esta em (11) e omitindo o fator comum k^2, temos

(12)
$$\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dW}{ds} + W = 0.$$

Esta é a **equação de Bessel** (1) da Seção 5.5 com o parâmetro $\nu = 0$.

Passo 2. Satisfazendo a Condição de Contorno (8)

As soluções de (12) são as funções de Bessel J_0 e Y_0 da primeira e segunda espécies (veja as Seções 5.5 e 5.6). Entretanto, Y_0 torna-se infinita em 0, de modo que não podemos usá-la, visto que a deflexão da membrana deve sempre se manter finita. Isto nos faz ficarmos com

(13)
$$W(r) = J_0(s) = J_0(kr) \qquad (s = kr).$$

Sobre o contorno $r = R$, de (8) obtemos $W(R) = J_0(kR) = 0$ (pois $G \equiv 0$ implicaria que $u \equiv 0$). Essa condição pode ser satisfeita, pois J_0 tem um número finito de raízes positivas, $s = \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ (veja a Fig. 305), com os valores numéricos

$$\alpha_1 = 2{,}4048, \quad \alpha_2 = 5{,}5201, \quad \alpha_3 = 8{,}6537, \quad \alpha_4 = 11{,}7915, \quad \alpha_5 = 14{,}9309$$

e assim por diante. (Para outros valores consulte seu aplicativo no computador ou a Ref. [GR1] no Apêndice 1.) Essas raízes têm um espaçamento ligeiramente irregular, como podemos ver. A Equação (13) agora implica que

(14)
$$kR = \alpha_m, \qquad \text{portanto,} \qquad k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}, \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

Logo, as funções

(15)
$$W_m(r) = J_0(k_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}\,r\right), \qquad m = 1, 2, \cdots$$

são soluções de (11) que valem zero no entorno do círculo $r = R$.

Autofunções e Autovalores. Para W_m em (15), uma solução geral correspondente de (10) com $\lambda = \lambda_m = ck_m = c\alpha_m/R$ é

$$G_m(t) = A_m \cos \lambda_m t + B_m \operatorname{sen} \lambda_m t.$$

Logo, as funções

(16)
$$u_m(r, t) = W_m(r)G_m(t) = (A_m \cos \lambda_m t + B_m \operatorname{sen} \lambda_m t)J_0(k_m r)$$

com $m = 1, 2, \cdots$ são soluções da equação da onda (7) satisfazendo a condição de contorno (8). Estas são as **autofunções** de nosso problema. Os **autovalores** correspondentes são λ_m.

A vibração da membrana correspondente a u_m é chamada de m-ésimo **modo normal** e tem a freqüência de $\lambda_m/2\pi$ ciclos por unidade de tempo. Como os zeros da função J_0 de Bessel não são regularmente espaçados sobre o eixo (diferentemente dos zeros das funções senoidais que surgem no caso da corda vibrante), o som de um tambor é completamente diferente do som de um violino. As formas dos modos normais podem ser facilmente obtidas da Fig. 305 e estão mostradas na Fig. 306. Para $m = 1$, todos os pontos da membrana se movem para cima (ou para baixo) ao mesmo tempo. Para $m = 2$, a situação é a seguinte. A função $W_2(r) = J_0(\alpha_2 r/R)$ vale zero para $\alpha_2 r/R = \alpha_1$, portanto, $r = \alpha_1 R/\alpha_2$. O círculo $r = \alpha_1 R/\alpha_2$ é, portanto, a **linha nodal** e, quando em algum ponto, a parte central da membrana se move para cima, a parte de fora ($r > \alpha_1 R/\alpha_2$) se move para baixo, e vice-versa. A solução $u_m(r, t)$ possui $m - 1$ linhas nodais, que são círculos (Fig. 306).

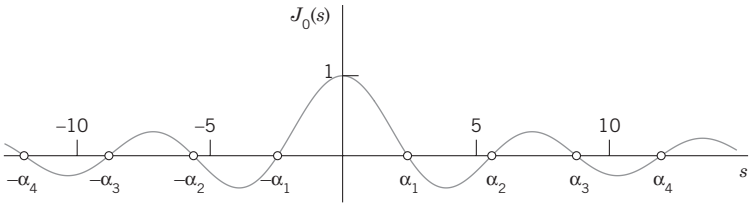


Fig. 305. Função de Bessel $J_0(s)$

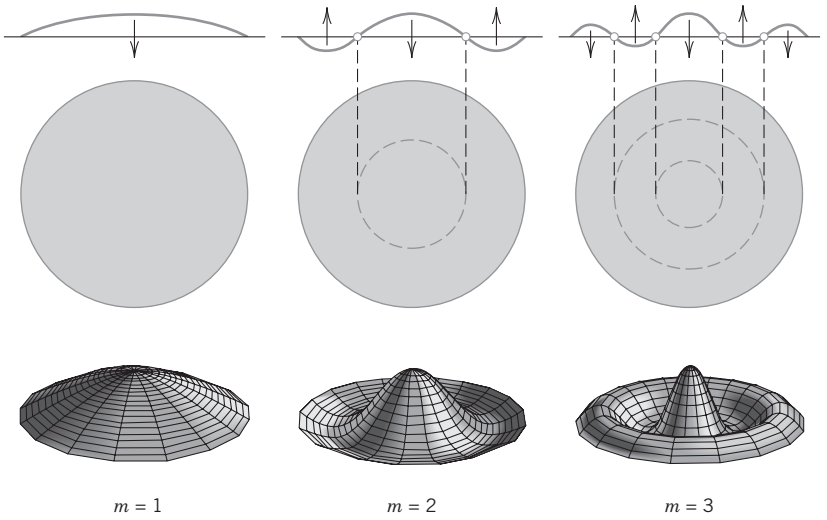


Fig. 306. Modos normais da membrana circular no caso de vibrações independentes do ângulo

Passo 3. Solução do Problema Inteiro

Para obtermos uma solução $u(r, t)$ que também satisfaça as condições iniciais (9), podemos proceder como no caso da corda. Isto é, consideramos a série

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r)G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos \lambda_m t + B_m \operatorname{sen} \lambda_m t)\, J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) \tag{17}$$

(deixando de lado o problema da convergência e unicidade). Fazendo $t = 0$ e usando (9a), obtemos

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = f(r). \tag{18}$$

Portanto, para que a série (17) satisfaça a condição (9a), as constantes A_m devem ser os coeficientes da **série de Fourier-Bessel** (18) que representa $f(r)$ em termos de $J_0(\alpha_m r/R)$; isto é [veja (10) da Seção 5.8 com $n = 0$, $\alpha_{0,m} = \alpha_m$, e $x = r$],

$$A_m = \frac{2}{R^2 J_1^{\,2}(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr \qquad (m = 1, 2, \cdots). \tag{19}$$

A derivabilidade de $f(r)$ no intervalo $0 \leqq r \leqq R$ é suficiente para a existência do desenvolvimento dedução (18); veja a Ref. [A13]. Os coeficientes B_m em (17) podem ser determinados a partir de (9b) de uma maneira semelhante. Valores numéricos de A_m e B_m podem ser obtidos de um aplicativo de computador ou por método de integração numérica usando-se as tabelas de J_0 e J_1. Entretanto, a integração numérica pode às vezes ser ***evitada***, como mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 **Vibrações de uma Membrana Circular**

Encontre as vibrações de uma tampa de tambor circular de raio = 1 ft e massa específica de 2 slugs/ft² se a tensão é de 8 lb/ft, a velocidade inicial é 0 e o deslocamento inicial é

$$f(r) = 1 - r^2 \text{ [ft]}.$$

Solução. $c^2 = T/\rho = 8/2 = 4$ [ft²/s²]. Também $B_m = 0$, uma vez que a velocidade inicial é 0. De (19) e do Exemplo 3 da Seção 5.8, como $R = 1$, obtemos

$$A_m = \frac{2}{J_1^2(\alpha_m)} \int_0^1 r(1 - r^2)\, J_0(\alpha_m r)\, dr$$

$$= \frac{4J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1^2(\alpha_m)}$$

$$= \frac{8}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)}$$

na qual a última igualdade decorre de (24c) da Seção 5.5, com $\nu = 1$, ou seja,

$$J_2(\alpha_m) = \frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m) - J_0(\alpha_m) = \frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m).$$

A Tabela 9.5 na Ref. [GR1] fornece α_m e $J_0'(\alpha_m)$. Disto, obtemos $J_1\alpha_m = -J_0'(\alpha_m)$ por (24b) da Seção 5.5, com $\nu = 0$ e calculamos os coeficientes A_m:

m	α_m	$J_1(\alpha_m)$	$J_2(\alpha_m)$	A_m
1	2,40483	0,51915	0,43176	1,10801
2	5,52008	–0,34026	–0,12328	–0,13978
3	8,65373	0,27145	0,06274	0,04548
4	11,79153	–0,23246	–0,03943	–0,02099
5	14,93092	0,20655	0,02767	0,01164
6	18,07106	–0,18773	–0,02078	–0,00722
7	21,21164	0,17327	0,01634	0,00484
8	24,35247	–0,16170	–0,01328	–0,00343
9	27,49348	0,15218	0,01107	0,00253
10	30,63461	–0,14417	–0,00941	–0,00193

Portanto,

$$f(r) = 1{,}108J_0(2{,}4048r) - 0{,}140J_0(5{,}5201r) + 0{,}045J_0(8{,}6537r) - \cdots$$

Vemos que os coeficientes decrescem relativamente devagar. A soma dos coeficientes fornecidos explicitamente na tabela é 0,99915. A soma de *todos* os coeficientes deve ser 1. (Por quê?) Logo, pelo teste de Leibniz no Apêndice A3.3, a soma parcial desses termos dá um valor correto até cerca de três casas decimais para a amplitude $f(r)$.

Como

$$\lambda_m = ck_m = c\alpha_m/R = 2\alpha_m,$$

logo obtemos de (17) a solução (com r medido em pés e t em segundos)

$$u(r, t) = 1{,}108J_0(2{,}4048r)\cos 4{,}8097t - 0{,}140J_0(5{,}5201r)\cos 11{,}0402t + 0{,}045J_0(8{,}6537r)\cos 17{,}3075t - \cdots.$$

Na Fig. 306, $m = 1$ dá uma idéia do movimento do primeiro termo de nossa série, $m = 2$ faz o mesmo para o segundo termo e $m = 3$ para o terceiro, de modo que podemos "ver" que nosso resultado aproxima-se bem do obtido para a corda de violino na Seção 12.3. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.9

1. Por que usamos coordenadas polares nesta seção?

2. Elabore os detalhes do cálculo que leva ao laplaciano em coordenadas polares.

3. Se u é independente de θ, então (5) se reduz a $\nabla^2 u = u_{rr} + u_r/r$. Deduza esta expressão diretamente do laplaciano em coordenadas cartesianas.

4. Uma **forma alternativa** de (5) é $\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$. Deduza esta expressão de (5).

5. (Solução radial) Mostre que a única solução de $\nabla^2 u = 0$ dependente só de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é $u = a \ln r + b$ com a e b constantes.

6. PROJETO DE EQUIPE. Séries para os problemas de Neumann e Dirichlet

(a) Mostre que $u_n = r^n \cos n\theta$, $u_n = r^n \operatorname{sen} n\theta$, $n = 0, 1, \cdots$ são soluções da equação de Laplace $\nabla^2 u = 0$ com $\nabla^2 u$ dada por (5). (Quais seriam os u_n em coordenadas polares? Experimente com pequenos valores de n.)

(b) Problema de Dirichlet (Veja a Seção 12.5) Supondo que a derivação termo a termo seja possível, mostre que uma solução da equação de Laplace no disco $r < R$ satisfazendo à condição de contorno $u(R, \theta) = f(\theta)$ (com f dada) é

(20)
$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\theta + b_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \operatorname{sen} n\theta \right]$$

na qual a_n, b_n são os coeficientes de Fourier de f (veja a Seção 11.1).

(c) Problema de Dirichlet Resolva o problema de Dirichlet usando (20) se $R = 1$ e as condições de contorno são $u(\theta) = -100$ V se $-\pi < \theta < 0$, $u(\theta) = 100$ V se $0 < \theta < \pi$ (esboce esse disco e indique os valores do contorno).

(d) Problema de Neumann Mostre que a solução do problema de Neumann $\nabla^2 u = 0$ se $r < R$, $u_N(R, \theta) = f(\theta)$ (sendo que $u_N = \partial u/\partial N$ é a derivada direcional na direção da normal externa) é

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)$$

com A_0 arbitrário e

$$A_n = \frac{1}{\pi n R^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi n R^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta.$$

(e) Condição de compatibilidade Mostre que (9) da Seção 10.4 impõe em $f(\theta)$ de (d) a "*condição de compatibilidade*"

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta = 0.$$

(f) Problema de Neumann Resolva $\nabla^2 u = 0$ no anel $1 < r < 3$ se $u_r(1, \theta) = \operatorname{sen} \theta$, $u_r(3, \theta) = 0$.

7–12 POTENCIAL ELETROSTÁTICO. PROBLEMAS PERMANENTES DE CALOR

O potencial eletrostático satisfaz à equação de Laplace $\nabla^2 u = 0$. em qualquer região sem cargas. Também a equação do calor $u_t = c^2 \nabla^2 u$ (Seção 12.5) se reduz à equação de Laplace se a temperatura u for independente do tempo (**"caso permanente"**). Usando (20), encontre o potencial (ou, de forma equivalente: a temperatura estacionária) no disco $r < 1$ se os valores de contorno são (esboce-os para acompanhar o que acontece).

7. $u(1, \theta) = 40 \cos^3 \theta$

8. $u(1, \theta) = 800 \operatorname{sen}^3 \theta$

9. $u(1, \theta) = 110$ se $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ e 0 em caso contrário

10. $u(1, \theta) = \theta$ se $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ e 0 em caso contrário

11. $u(1, \theta) = |\theta|$ se $-\pi < \theta < \pi$

12. $u(1, \theta) = \theta^2$ se $-\pi < \theta < \pi$

13. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Linhas Eqüipotenciais. Tente descobrir por palpite com o que se parecerão as linhas eqüipotenciais $u(r, \theta) = constante$ nos Problemas 9 e 11. A seguir, represente graficamente algumas delas usando as somas parciais das séries.

14. (Semidisco) Encontre o potencial eletrostático no semidisco $r < 1$, $0 < \theta < \pi$ que é igual a $110\theta(\pi - \theta)$ no semicírculo $r = 1$ e 0 no segmento $-1 < x < 1$.

15. (Semidisco) Encontre a temperatura estacionária numa chapa fina semicircular $r < a$, $0 < \theta < \pi$ com o semicírculo $r = a$ mantido a uma temperatura constante u_0 e o segmento $-a < x < a$ em 0.

16. (Invariância) Mostre que $\nabla^2 u$ é invariante sob as translações $x^* = x + a$, $y^* = y + b$ e sob as rotações $x^* = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$, $y^* = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$.

MEMBRANA CIRCULAR

17. (Freqüência) O que acontece à freqüência de uma autofunção de um tambor se dobrarmos a tensão?

18. (Tamanho de um tambor) Um tambor pequeno deve ter uma freqüência fundamental mais alta que a de um tambor grande, mantidas as mesmas tensões e massas específicas. Como isto aparece em nossas fórmulas?

19. (Tensão) Encontre a fórmula da tensão necessária para produzir num tambor uma freqüência fundamental f_1 desejada.

20. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Modos normais. (a) Represente graficamente os modos normais u_4, u_5, u_6 como na Fig. 306.

(b) Escreva um programa para calcular os A_m's no Exemplo 1 e estenda a tabela para $m = 15$. Verifique numericamente que $\alpha_m \approx (m - \frac{1}{4})\pi$ e calcule o erro para $m = 1, \cdots, 10$.

(c) Represente graficamente a deflexão inicial $f(r)$ no Exemplo 1, bem como as três primeiras somas parciais da série. Comente sobre a precisão.

(d) Calcule os raios das linhas nodais de u_2, u_3, u_4 quando $R = 1$. Como esses valores se comparam aos dos nodos de uma corda vibrante de comprimento 1? É possível estabelecer leis empíricas por experimentação com outros u_m?

21. (Linhas nodais) É possível que, para c e R fixos, dois ou mais u_m [veja (16)] com diferentes linhas nodais conrrespondam ao mesmo autovalor? (Justifique.)

22. No Exemplo 1, por que $A_1 + A_2 + \cdots = 1$? Calcule as primeiras somas parciais até obter uma precisão de três dígitos. O que este problema significa no campo da música?

23. (Velocidade inicial diferente de zero) Mostre que, para (17) satisfazer a (9b), devemos ter

$$\textbf{(21)} \qquad B_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} \times \times \int_0^R r g(r) J_0(\alpha_m r/R) \, dr.$$

VIBRAÇÕES DE UMA MEMBRANA CIRCULAR DEPENDENTE TANTO DE R QUANTO DE θ

24. (Separações) Mostre que a substituição de $u = F(r, \theta)\, G(t)$ na equação da onda (6), ou seja,

$$(22) \qquad u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$$

fornece uma EDO e uma EDP

$$(23) \qquad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0, \qquad \text{onde } \lambda = ck,$$

$$(24) \qquad F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + k^2 F = 0.$$

Mostre que a EDP pode agora ser separada pela substituição de $F = W(r)\, Q(\theta)$, dando

$$(25) \qquad Q'' + n^2 Q = 0,$$

$$(26) \qquad r^2 W'' + rW' + (k^2 r^2 - n^2) W = 0.$$

25. (Periodicidade) Em (25) e (26), mostre que $Q(\theta)$ deve ser periódica com período 2π e, portanto, $n = 0, 1, 2, \cdots$ Mostre que isto produz as soluções $Q_n = \cos n\theta$, $Q_n{}^* = \operatorname{sen} n\theta$, $W_n = J_n(kr)$, $n = 0, 1, \cdots$.

26. (Condição de contorno) Mostre que a condição de contorno

$$(27) \qquad u(R, \theta, t) = 0$$

leva a $k = k_{mn} = \alpha_{mn}/R$ onde $s = \alpha_{mn}$ é o m-ésimo ponto positivo de zero de $J_n(s)$.

27. (Soluções dependentes tanto de *R* quanto de *θ*) Mostre que as soluções de (22) que satisfazem a (27) são (Fig. 307)

$$u_{mn} = (A_{mn} \cos ck_{mn}t + B_{mn} \operatorname{sen} ck_{mn}t) \times J_n(k_{mn}r) \cos n\theta$$

(28)

$$u^*_{mn} = (A^*_{mn} \cos ck_{mn}t + B^*_{mn} \operatorname{sen} ck_{mn}t) \times J_n(k_{mn}r) \operatorname{sen} n\theta$$

28. (Condição inicial) Em (28), mostre que $u_t(r, \theta, 0) = 0$ dá $B_{mn} = 0$, $B^*_{mn} = 0$

29. Mostre que $u^*_{m0} = 0$ e u_{m0} é idêntica a (16) na presente seção.

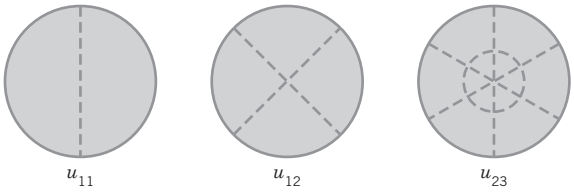


Fig. 307. Linhas nodais de algumas das soluções (28)

30. (Membrana semicircular) Mostre que u_{11} representa o modo fundamental de uma membrana semicircular e encontre a freqüência correspondente quando $c^2 = 1$ e $R = 1$.

12.10 Equação de Laplace em Coordenadas Esféricas e Cilíndricas. Potencial

A **equação de Laplace**

(1) $$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

é uma das mais importantes EDPs na Física e nas aplicações de engenharia. Aqui, x, y e z são as coordenadas espaciais cartesianas (Fig. 165 da Seção 9.1) $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$, etc. A expressão $\nabla^2 u$ é chamada de **laplaciano** de u. A teoria das soluções de (1) é chamada **teoria do potencial**. Soluções de (1) que tenham derivadas parciais de segunda ordem ***contínuas*** são conhecidas como **funções harmônicas**.

A equação de Laplace ocorre principalmente em **gravitação,** em **eletrostática** (veja o Teorema 3 da Seção 9.7), na **condução de calor** estacionária (Seção 12.5) e no **escoamento de fluidos** (a ser discutido no Capítulo. 18.4).

Lembre da Seção 9.7 que o **potencial** gravitacional $u(x, y, z)$ num ponto (x, y, z) resulta de uma única massa localizada no ponto (X, Y, Z) é

(2) $$u(x, y, z) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}} \qquad (r > 0)$$

e u satisfaz (1). De modo similar, se a massa é distribuída numa região T no espaço com massa específica $\rho(X, Y, Z)$, seu potencial num ponto (x, y, z) não ocupado pela massa é

(3) $$u(x, y, z) = k \iiint_T \frac{\rho(X, Y, Z)}{r}\, dX\, dY\, dZ.$$

Isto satisfaz (1), pois $\nabla^2(1/r) = 0$ (Seção 9.7) e ρ não é uma função de x, y, z.

Problemas práticos envolvendo a equação de Laplace são os problemas de valor de contorno numa região T no espaço limitada por uma superfície S. Tal problema é chamado de (veja também o caso bidimensional na Seção 12.5):

(I) Primeiro problema de valor de contorno ou **problema de Dirichlet** se u for especificada em S.

(II) Segundo problema de valor de contorno ou **problema de Neumann** se a derivada normal $u_n = \partial u/\partial n$ for especificada em S.

(III) Terceiro problema ou problema misto de valor de contorno ou ainda **problema de Robin** se u for especificada numa certa porção de S e u_n na porção restante do mesmo S.

Laplaciano em Coordenadas Cilíndricas

O primeiro passo para resolver um problema de valor de contorno geralmente é a introdução de coordenadas nas quais o contorno da superfície S possui uma representação simples. Uma simetria cilíndrica (um cilindro como uma região T) pede as coordenadas cilíndricas r, θ, z, que se relacionam a x, y, z por

(4) $$x = r \cos \theta, \qquad y = r \operatorname{sen} \theta, \qquad z = z$$ (Fig. 308).

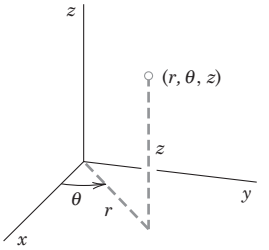


Fig. 308. Coordenadas cilíndricas

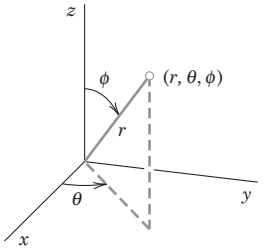


Fig. 309. Coordenadas esféricas

Para essas coordenadas, obtemos $\nabla^2 u$ de modo imediato adicionando u_{zz} a (5) na Seção 12.9; dessa forma,

(5)
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Laplaciano em Coordenadas Esféricas

A simetria esférica (como uma bola como região T limitada por uma esfera S) requer as coordenadas esféricas r, θ, ϕ, que se relacionam a x, y, z por

(6)
$$x = r\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi, \qquad y = r\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi, \qquad z = r\cos\phi \qquad \text{(Fig. 309).}$$

Usando a regra da cadeia (como na Seção 12.9), obtemos $\nabla^2 u$ em coordenadas esféricas.

(7)
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Deixamos os detalhes como exercício. Algumas vezes, é mais prático escrever (7) na forma

(7′)
$$\nabla^2 u = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right].$$

Observação sobre a Simbologia. A Equação (6) é usada em cálculo e adota a notação familiar para as coordenadas polares. Infelizmente, alguns livros usam θ e ϕ indistintamente, o que decorre da maneira de se escrever $x = r\cos\phi$, $y = r\,\operatorname{sen}\phi$ para as coordenadas polares (adotada em alguns países europeus).

Problema do Valor do Contorno em Coordenadas Esféricas

Resolveremos o seguinte **problema de Dirichlet** em coordenadas esféricas:

(8)
$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)\right] = 0.$$

(9)
$$u(R, \phi) = f(\phi)$$

(10)
$$\lim_{r\to\infty} u(r, \phi) = 0.$$

A EDP (8) decorre de (7) supondo-se que a solução u não irá depender de θ, visto que a condição de Dirichlet (9) é independente de θ. Tal situação pode se referir a um potencial eletrostático (ou a uma temperatura) $f(\phi)$ onde a esfera S: $r = R$ é mantida. A condição (10) significa que o potencial no infinito será zero.

Separação de Variáveis. Substituindo $u(r, \phi) = G(r)H(\phi)$ em (8), multiplicando (8) por r^2, fazendo a substituição e então dividindo por GH, obtemos

$$\frac{1}{G}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dG}{dr}\right) = -\frac{1}{H\operatorname{sen}\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{dH}{d\phi}\right).$$

Pelos argumento usual, ambos os lados devem ser iguais a uma constante k. Logo, chegamos às duas EDOs

(11) $$\frac{1}{G}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dG}{dr}\right) = k \qquad \text{ou} \qquad r^2\,\frac{d^2G}{dr^2} + 2r\,\frac{dG}{dr} = kG$$

e

(12) $$\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\,\frac{d}{d\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\,\frac{dH}{d\phi}\right) + kH = 0.$$

As soluções de (11) assumirão uma forma mais simples se fizermos $k = n(n + 1)$. Dessa forma, escrevendo $G' = dG/dr$ etc., obtemos

(13) $$r^2G'' + 2rG' - n(n + 1)G = 0.$$

Esta é uma **equação de Euler-Cauchy**. Da Seção 2.5, sabemos que ela possui soluções $G = r^a$. Substituindo esta expressão e cancelando o fator comum r^a, chegamos a

$$a(a - 1) + 2a - n(n + 1) = 0. \qquad \text{As raízes são} \qquad a = n \quad \text{e} \quad -n - 1.$$

Portanto, as soluções são

(14) $$G_n(r) = r^n \qquad \text{e} \qquad G_n^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}\,.$$

Resolvamos agora (12). Fazendo $\cos\phi = w$, temos $\operatorname{sen}^2\phi = 1 - w^2$ e

$$\frac{d}{d\phi} = \frac{d}{dw}\,\frac{dw}{d\phi} = -\operatorname{sen}\phi\,\frac{d}{dw}\,.$$

Logo, (12) com $k = n(n + 1)$ assume a forma

(15) $$\frac{d}{dw}\left[(1 - w^2)\,\frac{dH}{dw}\right] + n(n + 1)H = 0.$$

Esta é a **equação de Legendre** (veja a Seção 5.3), que se escreve como

(15′) $$(1 - w^2)\,\frac{d^2H}{dw^2} - 2w\,\frac{dH}{dw} + n(n + 1)H = 0.$$

Para inteiros $n = 0, 1, \cdots$, os polinômios de Legendre

$$H = P_n(w) = P_n(\cos\phi) \qquad n = 0, 1, \cdots,$$

são soluções da equação de Legendre (15). Deste modo, obtemos as duas seqüências de solução $u = GH$ da equação de Laplace (8) com A_n e B_n constantes e onde $n = 0, 1, \cdots$,

(16) $$\text{(a)}\quad u_n(r, \phi) = A_n r^n P_n(\cos\phi), \qquad \text{(b)}\quad u_n^*(r, \phi) = \frac{B_n}{r^{n+1}}\,P_n(\cos\phi)$$

Uso da Série de Fourier-Legendre

Problema Interior: Potencial Dentro da Esfera *S*. Consideremos uma série de termos de (16a),

(17) $$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\phi) \qquad (r \leqq R).$$

Como S é dada por $r = R$, para que (17) satisfaça à condição de Dirichlet (9) sobre a esfera S, devemos ter

(18) $$u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\phi) = f(\phi);$$

ou seja, (18) deve ser a **série de Fourier-Legendre** de $f(\phi)$. De (7) da Seção 5.8, obtemos os coeficientes

(19*) $$A_n R^n = \frac{2n + 1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(w) P_n(w)\, dw$$

onde $\tilde{f}(w)$ representa $f(\phi)$ como uma função $w = \cos(\phi)$. Como $dw = -\operatorname{sen}\phi\, d\phi$ e os limites de integração -1 e 1 correspondem a $\phi = \pi$ e $\phi = 0$, respectivamente, obtemos também

(19)
$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi} f(\phi)P_n(\cos\phi)\,\operatorname{sen}\phi\,d\phi, \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

Se $f(\phi)$ e $f'(\phi)$ são contínuas por intervalo em $0 \leqq \phi \leqq \pi$, então a série (17) com os coeficientes (19) é uma solução do nosso problema para os pontos interiores à esfera, uma vez que se pode mostrar que, sob estas suposições de continuidade, a série (17) com os coeficientes (19) fornece por derivação termo a termo as derivadas verificadas em (8), justificando assim nossa dedução.

Problema Exterior: Potencial Fora da Esfera *S*. Fora da esfera, não podemos usar as funções u_n de (16a), pois elas não satisfazem (10). Mas podemos usar as funções u_n^* de (16b), as quais realmente satisfazem (10) (embora não possam ser usadas dentro de S; por quê?). Procedendo como antes, chegamos à solução do problema exterior

(20)
$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\phi) \qquad (r \geqq R)$$

que satisfaz (8), (9), (10), com os coeficientes

(21)
$$B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1}\int_0^{\pi} f(\phi)P_n(\cos\phi)\,\operatorname{sen}\phi\,d\phi.$$

O exemplo seguinte ilustra tudo isto para uma esfera de raio 1 e consistindo em dois hemisférios separados por uma pequena faixa de material isolante ao longo do equador, de modo a ser possível manter esses hemisférios em diferentes potenciais (110 V e 0 V).

EXEMPLO 1 Capacitor Esférico

Encontre o potencial dentro e fora de um capacitor esférico consistindo em dois hemisférios metálicos de raio igual a 1 pé (ft), separados por uma pequena fenda de isolamento, se o hemisfério superior é mantido a 110 V e o inferior é aterrado (Fig. 310).

Solução. A condição de contorno dada é (lembre-se da Fig. 309)

$$f(\phi) = \begin{cases} 110 & \text{se} \quad 0 \leqq \phi < \pi/2 \\ 0 & \text{se} \quad \pi/2 < \phi \leqq \pi. \end{cases}$$

Como $R = 1$, obtemos de (19),

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \cdot 110 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos\phi)\,\operatorname{sen}\phi\,d\phi$$

$$= \frac{2n+1}{2} \cdot 110 \int_0^{1} P_n(w)\,dw$$

sendo $w = \cos\phi$. Portanto, $P_n(\cos\phi)\,\operatorname{sen}\phi\,d\phi = -P_n(w)dw$. Integramos de 1 a 0 e por fim eliminamos o sinal negativo integrando de 0 a 1. Você pode calcular essa integral em seu computador ou então continuar, usando (11) da Seção 5.3, obtendo assim

$$A_n = 55(2n+1)\sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}\int_0^1 w^{n-2m}\,dw$$

em que $M = n/2$ para n par e $M = (n-1)/2$ para n ímpar. A integral é igual a $1/(n-2m+1)$. Portanto,

(22)
$$A_n = \frac{55(2n+1)}{2^n}\sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!}.$$

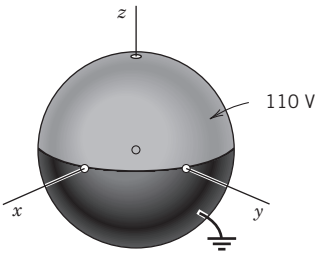


Fig. 310. Capacitor esférico do Exemplo 1

Fazendo $n = 0$, obtemos $A_0 = 55$ (visto que $0! = 1$). Para $n = 1, 2, 3 \cdots$, obtemos

$$A_1 = \frac{165}{2} \cdot \frac{2!}{0!1!2!} = \frac{165}{2},$$

$$A_2 = \frac{275}{4}\left(\frac{4!}{0!2!3!} - \frac{2!}{1!1!1!}\right) = 0,$$

$$A_3 = \frac{385}{8}\left(\frac{6!}{0!3!4!} - \frac{4!}{1!2!2!}\right) = -\frac{385}{8}, \qquad \text{etc.}$$

Logo, ***o potencial* (17) *dentro da esfera*** é (uma vez que $P_0 = 1$)

$$u(r, \phi) = 55 + \frac{165}{2} r P_1(\cos\phi) - \frac{385}{8} r^3 P_3(\cos\phi) + \cdots \tag{23}$$

(Fig. 311)

com $P_1, P_3, \cdots$ dado por (11′) da Seção 5.3. Como $R = 1$, vemos, de (19) e (21) desta seção, que $B_n = A_n$, de modo que (20) conseqüentemente nos fornece ***o potencial fora da esfera***

$$u(r, \phi) = \frac{55}{r} + \frac{165}{2r^2} P_1(\cos\phi) - \frac{385}{8r^4} P_3(\cos\phi) + \cdots. \tag{24}$$

Podemos agora usar as somas parciais dessas séries para calcularmos os valores aproximados dos potenciais externo e interno. Também é interessante notar que, longe da esfera, o potencial é aproximadamente o de uma carga pontual, ou seja, $55/r$. (Compare com o Teorema 3 da Seção 9.7.)

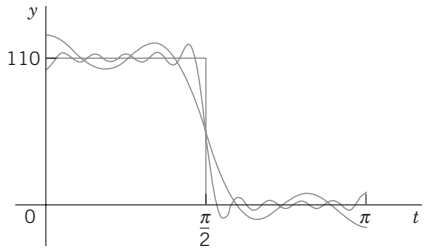


Fig. 311. Somas parciais dos primeiros 4, 6 e 11 termos não-nulos de (23) para $r = R = 1$

EXEMPLO 2 Casos Mais Simples. Simplificação de Problemas

Em casos como este do Exemplo 1, é possível evitar as complicações técnicas. Por exemplo, encontre o potencial no interior da esfera S: $r = R = 1$ quando S é mantida no potencial $f(\phi) = \cos 2\phi$. (Quanto vale o potencial em S? E no pólo Norte? No Equador? No pólo Sul?)

Solução. $w = \cos\phi$, $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = 2w^2 - 1 = \frac{4}{3}P_2(w) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}(\frac{3}{2}w^2 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}$. Portanto, o potencial no interior da esfera é

$$u = \tfrac{4}{3}r^2P_2(w) - \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}r^2P_2(\cos\phi) - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}r^2(3\cos^2\phi - 1) - \tfrac{1}{3}.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.10

1. Deduza (7) a partir de $\nabla^2 u$ em coordenadas cartesianas. (Mostre os detalhes.)

2. Encontre as superfícies nas quais as funções u_1, u_2, u_3 são zero.

3. Faça um esboço das funções $P_n(\cos\phi)$ para $n = 0, 1, 2$ (veja (11′) da Seção 5.3).

4. Faça um esboço das funções $P_3(\cos\phi)$ e $P_4(\cos\phi)$.

5. Verifique que u_n e u^*_n em (16) são soluções de (8).

6–11 POTENCIAIS DEPENDENTES SOMENTE DE r

6. (3 dimensões) Mostre que a única solução da equação de Laplace dependente só de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é $u = c/r + k$ com c e k constantes.

7. (3 dimensões) Verifique que $u = c/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, satisfaz a equação de Laplace em coordenadas esféricas.

8. (Problema de Dirichlet) Encontre o potencial eletrostático entre duas esferas concêntricas de raios $r_1 = 10$ cm e $r_2 = 20$ cm mantidas nos potenciais $U_1 = 260$ V e $U_2 = 110$ V, respectivamente.

9. (2 dimensões, potencial logarítmico) Mostre que a única solução de uma equação de Laplace bidimensional dependente só de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é $u = c \ln r + k$ com c e k constantes.

10. (Potencial logarítmico) Encontre o potencial eletrostático entre dois cilindros coaxiais de raios $r_1 = 10$ cm e $r_2 = 20$ cm mantidos nos potenciais $U_1 = 260$ V e $U_2 = 110$ V, respectivamente. Compare com o Problema (8). Comente.

11. (Problema de calor) Se a superfície da bola $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$ for mantida à temperatura 0 e a temperatura inicial da bola for $f(r)$, mostre que a temperatura $u(r, t)$ na bola é a solução de $u_t = c^2(u_{rr} + 2u_r/r)$ satisfazendo às condições $u(R, t) = 0$, $u(r, 0) = f(r)$. Mostre que, fazendo $v = ru$, temos $v_t = c^2 v_{rr}$, $v(R, t) = 0$, $v(r, 0) = rf(r)$. Inclua a condição $v(0, t) = 0$ (que se verifica porque u deve estar confinada em $r = 0$) e resolva o problema resultante por separação de variáveis.

12. (Problemas de potencial bidimensionais) Mostre que as funções $x^2 - y^2$, xy, $x/(x^2 + y^2)$, $e^x \cos y$, $e^x \operatorname{sen} y$, $\cos x \cosh y$, $\ln(x^2 + y^2)$, e $\arctan(y/x)$ satisfazem a equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(Problemas bidimensionais são melhor resolvidos por intermédio da ***análise complexa***, conforme veremos no Capítulo 18.)

13–17 POTENCIAIS DE VALORES DE CONTORNO EM COORDENADAS ESFÉRICAS r, θ, ϕ

Encontre o potencial no interior da esfera S: $r = R = 1$ se o interior encontra-se livre de cargas e o potencial em S é:

13. $f(\phi) = 100$

14. $f(\phi) = \cos \phi$

15. $f(\phi) = \cos 3\phi$

16. $f(\phi) = \text{sen}^2 \phi$

17. $f(\phi) = 35 \cos 4\phi + 20 \cos 2\phi + 9$

18. No Problema 13, mostre que o potencial exterior à esfera é o mesmo que o de uma carga puntual na origem. Isso é fisicamente plausível?

19. Faça um esboço da interseção das superfícies eqüipotenciais no plano xz no Problema 14.

20. Encontre o potencial exterior à esfera no Exemplo 2 do texto e no Problema 15.

21. Qual é a temperatura numa bola de raio 1 e feita de material homogêneo, se seu hemisfério limite inferior é mantido a 0°C e o superior a 100°C?

22. (Reflexão numa esfera) Considere as coordenadas esféricas r, θ, ϕ. Se $u(r, \theta, \phi)$ satisfaz $\nabla^2 u = 0$, mostre que a função $v(r, \theta, \phi) = u(1/r, \theta, \phi)/r$ satisfaz $\nabla^2 v = 0$. O que isto representa para (16)?

23. (Reflexão num círculo) Considere as coordenadas polares r, θ. Se $u(r, \theta)$ satisfaz $\nabla^2 u = 0$, mostre que a função $v(r, \theta) = u(1/r, \theta)$ satisfaz $\nabla^2 v = 0$. Como ficam $u = r \cos\theta$ e v em termos de x e y? Responda à mesma questão para $u = r^2 \cos\theta \text{ sen } \theta$ e v.

24. PROJETO DE EQUIPE. Linhas de Transmissão e EDPs Relacionadas. Considere um longo cabo (ou um fio de telefone) (Fig. 312) que esteja isolado imperfeitamente, de modo que ocorram vazamentos ao longo de toda a sua extensão. A fonte S da corrente $i(x, t)$ no cabo encontra-se em $x = 0$, e o terminal receptor T está em $x = l$. A corrente flui de S para T, através da resistência e escoa para a terra. Considere que R, L, C e G representam, respectivamente, a resistência, a indutância, a capacitância em relação à terra e a condutância em relação à terra, para o cabo por unidade de comprimento.

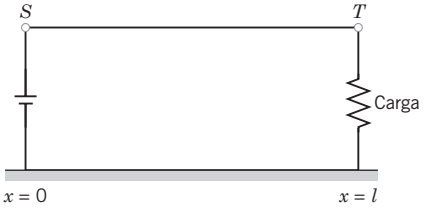


Fig. 312. Linha de transmissão

(a) Mostre que a (**"primeira equação da linha de transmissão"**)

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$$

na qual $u(x, t)$ é o potencial no cabo. *Sugestão:* aplique a lei da voltagem de Kirchhoff numa pequena porção do cabo entre x e $x + \Delta x$ (diferença de potenciais entre x e $x + \Delta x$ = queda resistiva + queda indutiva).

(b) Mostre que, para o cabo em (a) (**"segunda equação da linha de transmissão"**),

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

Sugestão: use a lei da corrente de Kirchhoff (diferença de correntes entre x e $x + \Delta x$ = perda devida ao escoamento para a terra + perda capacitiva).

(c) EDPs de segunda ordem. Mostre que a eliminação de i ou u das equações de linhas de transmissão leva a

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu,$$

$$i_{xx} = LCi_{tt} + (RC + GL)i_t + RGi.$$

(d) Equações do telégrafo. Para um cabo submarino, G é desprezível e as freqüências são baixas. Mostre que isto leva às chamadas *equações dos cabos submarinos* ou **equações do telégrafo**.

$$u_{xx} = RCu_t\,, \qquad i_{xx} = RCi_t.$$

Encontre o potencial num cabo submarino com as extremidades ($x = 0$, $x = l$) aterradas e uma distribuição inicial de tensão $u_0 =$ *constante*.

(e) Equações de linhas de alta freqüência. Mostre que, no caso de correntes alternadas de altas freqüências, a equação em (c) pode ser aproximada pelas chamadas **equações de linhas de alta freqüência**

$$u_{xx} = LCu_{tt}, \qquad i_{xx} = LCi_{tt}.$$

Resolva a primeira delas, supondo que o potencial inicial seja

$$U_0 \text{ sen } (\pi x/l),$$

e $u_t(x, 0) = 0$ e que, para todo t, $u = 0$ nas extremidades $x = 0$ e $x = l$.

12.11 Solução de EDPs por Transformadas de Laplace

Os leitores familiarizados com o Capítulo 6 podem se perguntar se também é possível utilizar as transformadas de Laplace para solucionar equações diferenciais *parciais*. A resposta é sim, particularmente se uma das variáveis independentes variar sobre os eixos positivos. Os passos para se obter uma solução são semelhantes aos do Capítulo 6. Para uma EDP com duas variáveis, eles são como se segue.

1. Obtenha a transformada de Laplace referente a uma das variáveis, geralmente t. Isto fornece uma ***EDO para a transformada*** da função desconhecida. Tal fato se verifica porque as derivadas desta função em relação à outra variável são levadas para a equação transformada. Esta última também incorpora as condições iniciais e de contorno.

2. Resolvendo esta EDO, obtenha a transformada da função desconhecida.
3. Obtendo a transformada inversa, encontre a solução do problema dado.

Se os coeficientes da função dada não dependerem de t, o uso das transformadas de Laplace simplificará o problema.

Expliquemos este método com um exemplo típico.

EXEMPLO 1 Corda Semi-infinita

Encontre o deslocamento $w(x, t)$ de uma corda elástica sujeita às seguintes condições. (Escrevemos w, uma vez que usamos u para denotar a função degrau unitário.)

(i) A corda encontra-se inicialmente em repouso no eixo x, de $x = 0$ a ∞ ("*corda semi-infinita*").

(ii) Para $t > 0$, a extremidade esquerda da corda ($x = 0$) move-se segundo uma determinada forma, digamos, conforme uma onda senoidal simples

$$w(0, t) = f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{se } 0 \leqq t \leqq 2\pi \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases} \qquad \text{(Fig. 313).}$$

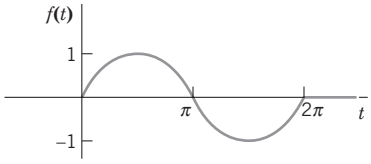


Fig. 313. Movimento da extremidade esquerda da corda do Exemplo 1 como uma função do tempo t

(iii) Além disso, $\lim_{x \to \infty} w(x, t) = 0$ para $t \geqq 0$.

Naturalmente, uma corda infinita não existe, mas nosso modelo é capaz de descrever uma longa corda ou cordão (com peso desprezível) tendo sua extremidade direita presa muito distante no eixo x.

Solução. Devemos resolver a equação da onda (Seção 12.2)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{1}$$

para x e t positivos e sujeitos às "condições de contorno"

$$w(0, t) = f(t), \qquad \lim_{x \to \infty} w(x, t) = 0 \qquad (t \geqq 0) \tag{2}$$

com f como dado em (2) e as condições iniciais

$$\text{(a)} \quad w(x, 0) = 0, \qquad \text{(b)} \quad w_t(x, 0) = 0. \tag{3}$$

Tomamos a transformada de Laplace ***em relação a t***. A partir de (2) na Seção 6.2,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\} = s^2 \mathcal{L}\{w\} - s w(x, 0) - w_t(x, 0) = c^2 \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}.$$

A expressão $-sw(x, 0) - w_t(x, 0)$ se anula por causa de (3). No lado direito, supomos que seja possível trocar a ordem da integração e diferenciação. Então,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t)\, dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{w(x, t)\}.$$

Escrevendo $W(x, s) = \mathcal{L}\{w(x, t)\}$, então obtemos

$$s^2 W = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad \text{logo,} \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} W = 0.$$

Como esta equação contém somente uma derivada em relação a x, ela pode ser vista como uma ***equação diferencial ordinária*** para $W(x, s)$, considerada como uma função de x. Uma solução geral é

$$W(x, s) = A(s) e^{sx/c} + B(s) e^{-sx/c}. \tag{4}$$

Obtemos de (2), escrevendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$,

$$W(0, s) = \mathcal{L}\{w(0, t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

Supondo que possamos trocar a ordem de integração e considerando o limite, temos

$$\lim_{x \to \infty} W(x, s) = \lim_{x \to \infty} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \lim_{x \to \infty} w(x, t)\, dt = 0.$$

Isto implica que $A(s) = 0$ em (4), pois $c > 0$, de modo que, para cada valor positivo e fixo de s, a função $e^{sx/c}$ cresce à medida que x aumenta. Note que podemos supor que $s > 0$, uma vez que uma transformada de Laplace geralmente existe para *todo* s maior que algum valor fixo de k (Seção 6.2). Portanto, temos

$$W(0, s) = B(s) = F(s),$$

de modo que (4) se torna

$$W(x, s) = F(s)e^{-sx/c}.$$

Pelo segundo teorema de deslocamento (Seção 6.3), com $a = x/c$, obtemos a transformada inversa

(5) $$w(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)\ u\left(t - \frac{x}{c}\right)$$ (Fig. 314)

isto é,

$$w(x, t) = \operatorname{sen}\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad \text{se} \qquad \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + 2\pi \qquad \text{ou} \qquad ct > x > (t - 2\pi)c$$

e zero nos demais casos. Esta é uma onda senoidal simples deslocando-se para a direita com a velocidade c. Note que um ponto x permanece em repouso até que $t = x/c$, que é o tempo necessário para a onda atingir esse x, caso o início da onda ocorra em $t = 0$ (início do movimento na extremidade esquerda) e a onda se desloca com velocidade c. Esse resultado concorda com nossa intuição física. Como estamos adotando um procedimento formal, é preciso verificar que (5) satisfaz as condições dadas. Deixamos isto a cargo do estudante. ■

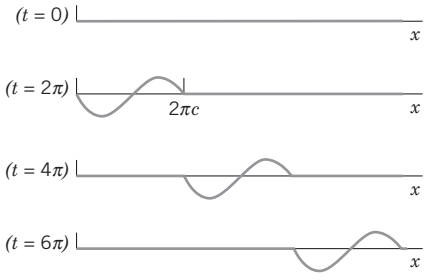


Fig. 314. Onda em movimento do Exemplo 1

Este é o fim do Capítulo (12), no qual nos concentramos nas mais importantes equações diferenciais parciais (EDPs) em física e engenharia. E este é também o fim da Parte C, que trata da análise de Fourier e das EDPs.

Vimos que as EDPs têm várias aplicações fundamentais em engenharia, o que as torna objeto de muitos projetos de pesquisa em andamento.

Os **métodos numéricos para as EDPs** são apresentados nas Seções 21.4–21.7, que são independentes das demais seções da Parte E, que trata dos métodos numéricos em geral.

Na Parte D, que se segue e versa sobre **análise complexa**, abordaremos uma área de natureza diferente, mas que é também de grande importância para os engenheiros, como nossos exemplos e problemas mostrarão. Isto inclui uma outra abordagem à **equação de Laplace** (bidimensional) e suas aplicações no Capítulo 18.

PROBLEMAS PROPOSTOS 12.11

1. Esboce uma figura similar à Fig. 314 se $c = 1$ e f for "triangular", como no Exemplo 1 da Seção 12.3.

2. De que forma a velocidade da onda no Exemplo 1 depende da tensão e da massa da corda?

3. Verifique a solução do Exemplo 1. Que onda em movimento é obtida no Exemplo 1 no caso de um movimento senoidal (e incessante) da extremidade esquerda, iniciado em $t = 0$?

4–6 RESOLVA POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + x\dfrac{\partial w}{\partial t} = x,\ w(x, 0) = 1,\ w(0, t) = 1$

5. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = xt, \quad w(x, 0) = 0 \text{ se } x \geqq 0,$
$w(0, t) = 0 \text{ se } t \geqq 0$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 100\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 100\dfrac{\partial w}{\partial t} + 25w,$
$w(x, 0) = 0 \text{ se } x \geqq 0, \quad w_t(x, 0) = 0 \text{ se } t \geqq 0,$
$w(0, t) = \operatorname{sen} t \text{ se } t \geqq 0$

7. Resolva o Problema 5 por um outro método.

8–10 PROBLEMA DE CALOR

Encontre a temperatura $w(x, t)$ numa barra semi-infinita, lateralmente isolada e que se estende ao infinito ao longo do eixo x, supondo que a temperatura inicial seja 0, $w(x, t) \to 0$ quando $x \to \infty$ para todo valor fixo de $t \geq 0$, e que $w(0, t) = f(t)$. Proceda como se segue.

8. Elabore o modelo e mostre que a transformada de Laplace leva a

$$sW = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (W = \mathcal{L}\{w\})$$

e

$$W = F(s)e^{-\sqrt{s}x/c} \quad (F = \mathcal{L}\{f\}).$$

Aplicando o teorema da convolução, mostre que

$$w(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t - \tau)\tau^{-3/2} e^{-x^2/(4c^2\tau)}\, d\tau.$$

9. Considere $w(0, t) = f(t) = u(t)$ (Seção 6.3). Represente os correspondentes w, W e F por w_0, W_0 e F_0. Então, mostre que, no Problema 8,

$$w_0(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-3/2} e^{-x^2/(4c^2\tau)}\, d\tau = 1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

com a função erro erf conforme definida em Problemas Propostos 12.6.

10. (Fórmula de Duhamel[4]) Mostre que no Problema 9,

$$W_0(x, s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x/c}$$

e que o teorema da convolução dá a *fórmula de Duhamel*

$$w(x, t) = \int_0^t f(t - \tau) \frac{\partial w_0}{\partial \tau}\, d\tau.$$

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 12

1. Escreva de memória as três EDPs de provavelmente maior importância e enuncie suas aplicações mais relevantes.

2. Qual é o método de separação de variáveis para EDPs? Cite um exemplo de memória.

3. O que é o princípio da superposição? Dê uma aplicação usual.

4. Que papel a série de Fourier desempenha neste capítulo? E as integrais de Fourier?

5. O que são as autofunções e suas freqüências para a corda vibrante? E para a equação do calor?

6. Que condições adicionais consideramos para a equação da onda? E para a equação do calor?

7. Cite e explique os três tipos de condições de contorno.

8. O que você sabe sobre os tipos de EDPs? E sobre a transformação para as formas normais?

9. O que é o método de D'Alembert? A qual EDP ele se aplica?

10. Quando e por que usamos coordenadas polares? E coordenadas esféricas?

11. Quando e por que a equação de Legendre surgiu neste capítulo? E a equação de Bessel?

12. Quais são as autofunções da membrana circular? Como suas freqüências diferem, em princípio, das autofunções de uma corda vibratória?

13. Explique com critérios matemáticos (e não físicos) por que obtivemos funções exponenciais ao separarmos a equação do calor, ao passo que isso não aconteceu para a equação da onda.

14. O que é a função erro? Por que e onde ela ocorreu?

15. Explique a idéia de se usarem os métodos da transformada de Laplace para EDPs. Dê um exemplo de memória.

16. Para quais k e m, $x^4 + kx^2y^2 + y^4$ e sen mx senh y são soluções da equação de Laplace?

17. Verifique que $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ satisfaz a equação de Laplace.

18–21 Resolva para $u = u(x, y)$:

18. $u_{yy} + 16u = 0$

19. $u_{xx} + u_x - 2u = 0$

20. $u_{xy} + u_y + x + y + 1 = 0$

21. $u_{yy} + u_y = 0$, $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = g(x)$

22. Encontre todas as soluções $u(x, y) = F(x)G(x)$ da equação de Laplace de duas variáveis.

23–26 Encontre e faça um esboço ou gráfico (como na Fig. 285 da Seção 12.3) da deflexão $u(x, t)$ de uma corda vibrante de comprimento π, estendendo-se de $x = 0$ a $x = \pi$ e com $c^2 = T/\rho = 1$, começando com velocidade 0 e a deflexão

23. $f(x) = \text{sen } x - \frac{1}{2} \text{ sen } 2x$

24. $f(x) = \frac{1}{2}\pi - |x - \frac{1}{2}\pi|$

25. $f(x) = \text{sen}^3 x$

26. $f(x) = x(\pi - x)$

27–30 Encontre a temperatura de distribuição numa fina barra de cobre lateralmente isolada ($c^2 = T/\rho\sigma = 1{,}158$ cm²/s), com de 50 cm de comprimento e seção reta constante, tendo as extremidades em $x = 0$ e 50 e mantida a 0°C, e a uma temperatura inicial de

27. $f(x) = \text{sen } (\pi x/50)$

28. $f(x) = x(50 - x)$

29. $f(x) = 25 - |25 - x|$

30. $f(x) = 4 \text{ sen}^3 (\pi x/10)$

31–33 Encontre a temperatura $u(x, t)$ numa barra lateralmente isolada de comprimento π, estendendo-se de $x = 0$ a $x = \pi$, com $c^2 = 1$ para condições de contorno adiabáticas (veja em Problemas Propostos 12.5) e a uma temperatura inicial de

31. $100 \cos 4x$

32. $3x^2$

33. $\pi - 2|x - \frac{1}{2}\pi|$

34. Usando somas parciais, represente num mesmo gráfico $u(x, t)$ no Problema 33 para várias constantes t. Esses gráficos concordam com sua intuição física?

35. Considere $f(x, y) = u(x, y, 0)$ como sendo a temperatura inicial numa fina chapa quadrada de lado π, com as bordas mantidas a 0°C e as faces perfeitamente isoladas. Separando as variáveis, obtenha, a partir de $u_t = c^2\nabla^2 u$ a solução

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \text{ sen } mx \text{ sen } ny\, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

na qual

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \text{ sen } mx \text{ sen } ny\, dx\, dy.$$

36. Encontre a temperatura no Problema 35 se

$$f(x, y) = x(\pi - x)y(\pi - y).$$

[4] JEAN-MARIE CONSTANT DUHAMEL (1797–1872), matemático francês.

37–42 Transforme para a forma normal e resolva (mostrando os detalhes!)

37. $u_{xy} = u_{xx}$

38. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$

39. $u_{xx} + 4u_{yy} = 0$

40. $2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

41. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

42. $u_{yy} + u_{xy} - 2u_{xx} = 0$

43–47 Mostre que as seguintes membranas de área 1 com $c^2 = 1$ têm as freqüências do modo fundamental conforme dadas (com quatro decimais). Compare.

43. Círculo: $\alpha_1/(2\sqrt{\pi}) = 0{,}6784$

44. Quadrado: $1\sqrt{2} = 0{,}7071$

45. Retângulo (lados 1 : 2): $\sqrt{5/8} = 0{,}7906$

46. Semicírculo: $3{,}832/\sqrt{8\pi} = 0{,}7644$

47. Quadrante de círculo: $\alpha_{12}/(4\sqrt{\pi}) = 0{,}7244$
($\alpha_{12} = 5{,}13562$ = primeiro zero positivo de J_2)

48–50 Encontre o potencial eletrostático nas seguintes regiões (sem carga).

48. Entre duas esferas concêntricas de raios r_0 e r_1 mantidas nos potenciais u_0 e u_1, respectivamente.

49. Entre dois cilindros coaxiais de raios r_0 e r_1 mantidos nos potenciais u_0 e u_1, respectivamente. (Compare com o Problema 48.)

50. No interior de uma esfera de raio 1 mantida no potencial $f(\phi) = \cos 3\phi + 3 \cos \phi$ (relacionada às nossas coordenadas esféricas usuais).

RESUMO DO CAPÍTULO 12
Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

Enquanto as EDOs (Capítulos 1–6) servem como modelos de problemas envolvendo somente *uma* variável independente, problemas envolvendo *duas ou mais* variáveis independentes (variáveis espaciais, ou o tempo t e uma ou diversas variáveis espaciais) levam às EDPs. Isto evidencia a enorme importância que as EDPs têm no trabalho dos engenheiros e físicos. As mais importantes delas são:

(1)	$u_{tt} = c^2 u_{xx}$	Equação da onda unidimensional (Seções 12.2–12.4)
(2)	$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$	Equação da onda bidimensional (Seções 12.7–12.9)
(3)	$u_t = c^2 u_{xx}$	Equação do calor unidimensional (Seções 12.5–12.6)
(4)	$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$	Equação de Laplace bidimensional (Seções 12.5–12.9)
(5)	$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$	Equação de Laplace tridimensional (Seção 12.10).

As Equações (1) e (2) são hiperbólicas, a (3) é parabólica e a (4) e (5) são elípticas.

Na prática, alguém interessado em obter a solução de uma equação dessas numa certa região, e satisfazendo algumas condições adicionais dadas, como as **condições iniciais** (condições no tempo $t = 0$), ou as **condições de contorno** (valores especificados para a solução u ou para algumas de suas derivadas sobre o contorno da superfície S, ou sobre o contorno de uma curva C da região), ou ambas. Para (1) e (2), especificam-se duas condições iniciais (deslocamento inicial e velocidade inicial). Para (3), especifica-se a distribuição da temperatura inicial. Para (4) e (5), especifica-se uma condição de contorno e chama-se o problema resultante (veja a Seção 12.5) de:

Problema de Dirichlet se u é especificada sobre S,
Problema de Neumann se $u_n = \partial u/\partial n$ é especificada sobre S,
Problema misto se u é especificada sobre uma parte de S e u_n sobre a outra.

Um método geral para resolver esses problemas é o **método de separação das variáveis** ou **método do produto**, onde se supõe que as soluções tenham a forma de produtos de funções, cada qual dependendo de uma só variável. Portanto, a Equação (1) é resolvida fazendo-se $u(x, t) = F(x)G(t)$; veja a Seção 12.3; algo similar ocorre com (3) (veja a Seção 12.5). A substituição na equação dada resulta em equações diferenciais ***ordinárias*** para F e G. Partindo-se destas, obtêm-se um número infinito de soluções $F = F_n$ e $G = G_n$ tais que as funções correspondentes

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$$

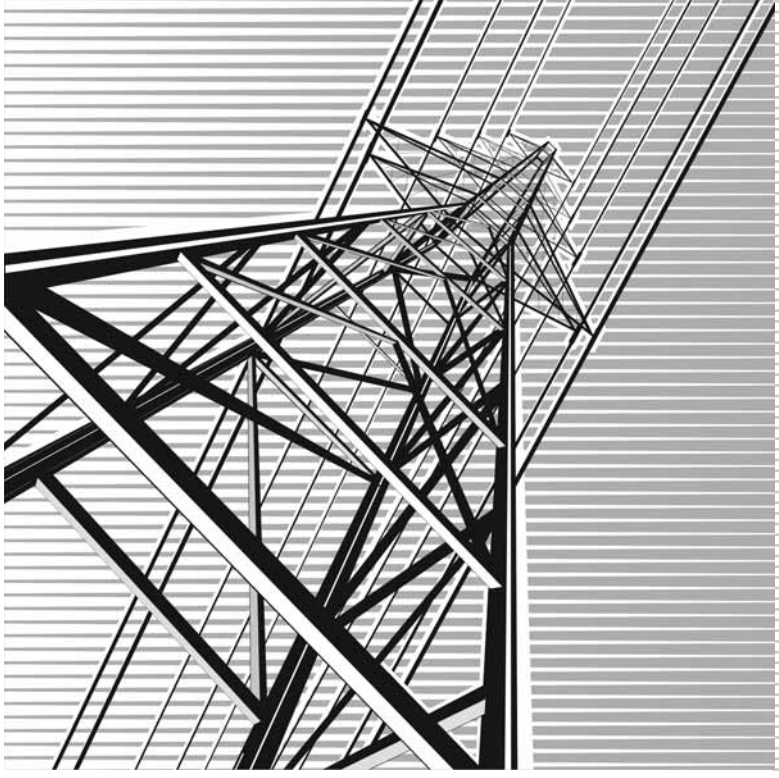
são soluções da EDP que satisfazem as condições de contorno dadas. Estas são as **autofunções** do problema, e os **autovalores** correspondentes determinam a freqüência da vibração (ou a velocidade do decréscimo da temperatura, no caso de uma equação do calor etc.). Para satisfazer também a condição inicial dada (ou condições), é preciso também considerar séries infinitas dos u_n, cujos coeficientes vêm a ser os coeficientes de Fourier das funções f e g que representam as condições iniciais dadas (Seções 12.3, 12.5). Logo, a **série de Fourier** (e as *integrais de Fourier*) são aqui de fundamental importância (Seções 12.3, 12.5, 12.6, 12.8).

Os **problemas permanentes** são aqueles onde a solução não depende do tempo t. Neles, a equação do calor $u_t = c^2\nabla^2 u$ se transforma na equação de Laplace.

Antes de resolvermos um problema de valor inicial ou de contorno, muitas vezes transformamos as EDPs em coordenadas nas quais o contorno da região considerada é dado por fórmulas simples. Logo, em coordenadas polares dadas por $x = r \cos \theta$, $y = r$ sen θ, o **laplaciano** torna-se (Seção 12.9)

(6) $$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta};$$

Para as coordenadas esféricas, veja a Seção 12.10. Se agora as variáveis forem separadas, obtém-se, de (2) e (6), a **equação de Bessel** (membrana circular vibrante, Seção 12.9) e, de (5), a **equação de Legendre** transformada em coordenadas esféricas (Seção 12.10).



PARTE D

Análise Complexa

CAPÍTULO 13 Números e Funções Complexas
CAPÍTULO 14 Integração Complexa
CAPÍTULO 15 Séries de Potências, Séries de Taylor
CAPÍTULO 16 Séries de Laurent. Integração por Resíduos
CAPÍTULO 17 Mapeamento Conforme
CAPÍTULO 18 Análise Complexa e Teoria do Potencial

Muitos problemas de engenharia podem ser modelados, investigados e resolvidos por meio de funções de uma variável complexa. Para os problemas mais simples, um pouco de conhecimento de números complexos será suficiente. Isso é o que se verifica para os casos mais simples de circuitos elétricos e sistemas mecânicos vibratórios. Já para problemas mais complicados de condução de calor, escoamento de fluidos, eletrostática etc., precisa-se da *teoria das funções analíticas complexas*, resumidamente chamada de **análise complexa**. A importância desta última na matemática aplicada reside em três razões principais:

1. A maior importância das funções analíticas está no fato de que suas partes real e imaginária satisfazem à equação de Laplace de duas variáveis reais. Logo, os problemas bidimensionais de potencial podem ser resolvidos pelos métodos das funções analíticas, e fazer isso é freqüentemente mais simples do que trabalhar com números reais.

2. É possível usar os elegantes métodos da integração complexa para calcular o valor de diversas integrais reais complicadas e integrais complexas encontradas nas aplicações.

3. Na matemática para engenharia, a maioria das funções são analíticas, e seu estudo como funções de uma variável complexa leva a uma compreensão mais aprofundada de suas propriedades e das inter-relações verificadas no caso complexo, que não têm analogia com o cálculo real.

CAPÍTULO 13

Números e Funções Complexas

Os **números complexos** e sua representação geométrica no plano complexo serão discutidos nas Seções 13.1 e 13.2. A análise complexa trata das **funções analíticas** complexas, que são definidas na Seção 13.3. A verificação da analiticidade será feita pelas **equações de Cauchy-Riemann** (Seção 13.4). Essas equações são de uma importância fundamental, também por causa de sua relação com a **equação de Laplace**.

As seções restantes deste capítulo abordarão as funções complexas elementares (exponenciais, trigonométricas, hiperbólicas e logarítmicas). Estas são uma generalização das funções reais familiares do cálculo. Seu conhecimento detalhado é uma necessidade absoluta em trabalhos práticos, da mesma forma que suas contrapartes reais no cálculo.

Pré-requisito: Cálculo elementar.
Referências e respostas dos problemas: Parte D do Apêndice 1 e Apêndice 2.

13.1 Números Complexos. Plano Complexo

As equações sem soluções *reais*, como $x^2 = -1$ ou $x^2 - 10x + 40 = 0$, têm sido desde muito tempo observadas ao longo da história e levaram à introdução dos números complexos.[1] Por definição, um **número complexo** z é um par ordenado (x, y) de números reais x e y, escrito como

$$z = (x, y).$$

x é a chamada **parte real** e y a **parte imaginária** de z, sendo escritas como

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Por definição, dois números complexos são **iguais** se e somente se suas partes reais forem iguais e suas partes imaginárias forem iguais.

(0, 1) é a chamada **unidade imaginária**, sendo representada por i,

(1) $$i = (0, 1).$$

Adição, Multiplicação. Notação $z = x + iy$

A **adição** de dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ é definida como

(2) $$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2).$$

A **multiplicação** se define como

(3) $$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Em particular, essas duas definições implicam que

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

e

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

[1] O primeiro a utilizar números complexos com este propósito foi o matemático italiano GIROLAMO CARDANO (1501–1576), que encontrou a fórmula de solução das equações cúbicas. O termo "número complexo" foi introduzido por CARL FRIEDRICH GAUSS (veja a nota de rodapé na Seção 5.4), que também foi o precursor de uma utilização mais geral dos números complexos.

como ocorre com os números reais x_1, x_2. Logo, os números complexos são uma ***"extensão"*** dos números reais. Podemos, portanto, escrever

$$(x, 0) = x. \qquad \text{Similarmente,} \qquad (0, y) = iy$$

porque, por (1) e pela definição de multiplicação, temos

$$iy = (0, 1)y = (0, 1)(y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, \quad 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y).$$

Juntando isso, temos a adição $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$:

Na prática, escrevemos os números complexos z = (x, y) como

(4)
$$z = x + iy$$

ou $z = x + yi$, como, p. ex., $17 + 4i$ (em vez de $i4$).

Os engenheiros eletricistas freqüentemente escrevem j, porque já utilizam i para se referir à corrente elétrica.

Se $x = 0$, então $z = iy$, sendo chamado de **imaginário puro**. Também (1) e (3) dão

(5)
$$i^2 = -1$$

por causa da definição de multiplicação, $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Para a **adição**, a notação-padrão (4) dá [veja (2)]

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Para a **multiplicação**, a notação-padrão fornece uma regra muito simples, que é a seguinte. Multiplique termo a termo e use $i^2 = -1$ quando isso ocorrer [veja (3)]:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Isso concorda com (3) e serve para mostrar que $x + iy$ é uma notação mais prática do que (x, y) para se referir aos números complexos.

Se você conhece vetores, sabe que (2) é uma adição vetorial, ao passo que a multiplicação (3) não tem contraparte na álgebra vetorial usual.

EXEMPLO 1 **Parte Real, Parte Imaginária, Soma e Produto de Números Complexos**

Consideremos $z_1 = 8 + 3i$ e $z_2 = 9 - 2i$. Então Re $z_1 = 8$, Im $z_1 = 3$, Re $z_2 = 9$, Im $z_2 = -2$ e

$$z_1 + z_2 = (8 + 3i) + (9 - 2i) = 17 + i,$$

$$z_1z_2 = (8 + 3i)(9 - 2i) = 72 + 6 + i(-16 + 27) = 78 + 11i.$$ ■

Subtração, Divisão

A **subtração** e a **divisão** são definidas como operações inversas da adição e da multiplicação, respectivamente. Portanto, a **diferença** $z = z_1 - z_2$ é o número complexo z para o qual $z_1 = z + z_2$. Logo, por (2),

(6)
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

O **quociente** $z = z_1/z_2\,(z_2 \neq 0)$ é o número complexo z para o qual $z_1 = zz_2$. Se igualarmos as partes reais e imaginárias em ambos os lados desta equação, fazendo $z = x + iy$, obtemos $x_1 = x_2x - y_2y$, $y_1 = y_2x + x_2y$. A solução é

(7*)
$$z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy, \qquad x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

A ***regra prática*** usada para chegarmos a isso é fazer a multiplicação do numerador e denominador de z_1/z_2 por $x_2 - iy_2$ e simplificar:

(7)
$$z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

EXEMPLO 2 Diferença e Quociente de Números Complexos

Para $z_1 = 8 + 3i$ e $z_2 = 9 - 2i$ obtemos $z_1 - z_2 = (8 + 3i) - (9 - 2i) = -1 + 5i$ e

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 3i}{9 - 2i} = \frac{(8 + 3i)(9 + 2i)}{(9 - 2i)(9 + 2i)} = \frac{66 + 43i}{81 + 4} = \frac{66}{85} + \frac{43}{85}\, i.$$

Verifique a divisão, fazendo a multiplicação para assim obter $8 + 3i$. ■

Os números complexos satisfazem às mesmas leis comutativa, associativa e distributiva dos números reais (veja em Problemas Propostos).

Plano Complexo

Isso tudo é álgebra. Agora vem a geometria: a representação geométrica dos números complexos como pontos no plano. Isso é de grande importância prática. A idéia é bastante simples e natural. Escolhemos dois eixos coordenados perpendiculares, o eixo horizontal x, chamado de **eixo real**, e o eixo vertical y, chamado de **eixo imaginário**. Em ambos os eixos, escolhemos a mesma unidade de comprimento (Fig. 315). Chama-se isso de um **sistema de coordenadas cartesianas**.

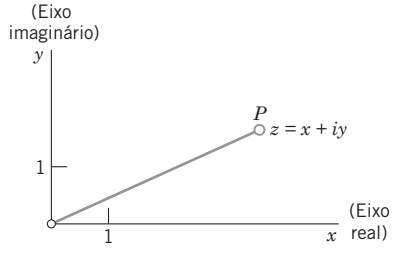


Fig. 315. O plano complexo

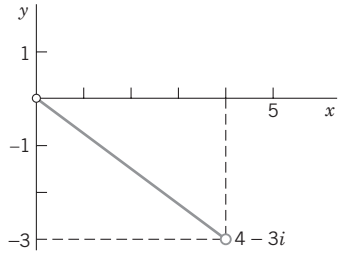


Fig. 316. O número 4 – 3*i* no plano complexo

Agora, representamos um dado número complexo $z = (x, y) = x + iy$ como o ponto P que tem as coordenadas x,y. O plano xy onde os números são representados dessa forma é chamado de **plano complexo**.[2] A Fig. 316 mostra um exemplo.

Em vez de falarmos "o ponto representado por z no plano complexo", dizemos de modo simples e resumido ***"o ponto z no plano complexo"***. Isso não deve causar mal-entendidos.

A adição e a subtração podem ser agora visualizadas pelas ilustrações nas Figs. 317 e 318.

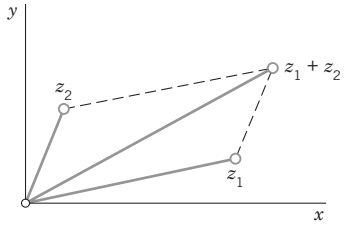


Fig. 317. Adição de números complexos

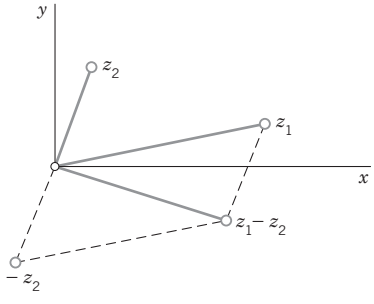


Fig. 318. Subtração de números complexos

Números Complexos Conjugados

O complexo conjugado $\bar{z}$ de um número complexo $z = x + iy$ é definido por

$$\bar{z} = x - iy.$$

[2]Às vezes, ele é também chamado de **diagrama de Argand**, em homenagem ao matemático JEAN ROBERT ARGAND (1768–1822), de nacionalidade francesa embora nascido em Genebra e que foi bibliotecário em Paris. Seu artigo sobre o plano complexo data de 1806, nove anos depois de um trabalho similar ter sido realizado pelo matemático norueguês CASPAR WESSEL (1745–1818), pesquisador da Academia Dinamarquesa de Ciências.

Ele é obtido geometricamente refletindo-se o ponto z no eixo real. A Fig. 319 mostra isso para $z = 5 + 2i$ e seu conjugado $\bar{z} = 5 - 2i$.

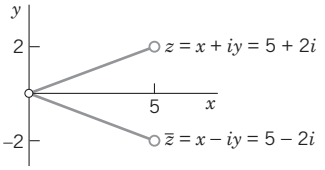


Fig. 319. Números complexos conjugados

O complexo conjugado é importante porque nos permite passar dos números complexos para os números reais. Com efeito, a multiplicação nos fornece $z\bar{z} = x^2 + y^2$ (verifique!). Pela adição e subtração, $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$. Portanto, obtemos para a parte real x e para a parte imaginária y (não iy!) de $z = x + iy$, as importantes fórmulas

(8)
$$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Se z for real, $z = x$, então $\bar{z} = z$ pela definição de $\bar{z}$, e vice-versa.

Trabalhar com conjugados é fácil, visto que temos

(9)
$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$
$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

EXEMPLO 3 Ilustração de (8) e (9)

Façamos $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = 2 + 5i$. Então, por (8),

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2i}[(4 + 3i) - (4 - 3i)] = \frac{3i + 3i}{2i} = 3.$$

Também a fórmula de multiplicação em (9) se verifica por

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(4 + 3i)(2 + 5i)} = \overline{(-7 + 26i)} = -7 - 26i,$$
$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (4 - 3i)(2 - 5i) = -7 - 26i.$$

■

PROBLEMAS PROPOSTOS 13.1

1. **(Potências de *i*)** Mostre que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $\cdots$ e $1/i = -i$, $1/i^2 = -1$, $1/i^3 = i$, $\cdots$.
2. **(Rotação)** A multiplicação por i é geometricamente uma rotação anti-horária de $\pi/2$ (90°). Verifique isso fazendo o gráfico de z e iz e o ângulo de rotação para $z = 2 + 2i$, $z = -1 - 5i$, $z = 4 - 3i$.
3. **(Divisão)** Verifique os cálculos feitos em (7).
4. **(Multiplicação)** Se o produto de dois números complexos for zero, mostre que pelo menos um dos fatores tem que ser zero.
5. Mostre que $z = x + iy$ é um imaginário puro se e somente se $\bar{z} = -z$.
6. **(Leis para os conjugados)** Verifique (9) para $z_1 = 24 + 10i$, $z_2 = 4 + 6i$.

7–15 ARITMÉTICA DE NÚMEROS COMPLEXOS

Considere os números $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 - 5i$. Mostrando os detalhes do que fizer, obtenha (na forma $x + iy$):

7. $(5z_1 + 3z_2)^2$
8. $\bar{z}_1 \bar{z}_2$
9. $\operatorname{Re}(1/z_1^2)$
10. $\operatorname{Re}(z_2^2)$, $(\operatorname{Re} z_2)^2$
11. z_2/z_1
12. $\bar{z}_1/\bar{z}_2$, $\overline{(z_1/z_2)}$
13. $(4z_1 - z_2)^2$
14. $\bar{z}_1/z_1$, $z_1/\bar{z}_1$
15. $(z_1 + z_2)/(z_1 - z_2)$

16–19

Considere $z = x + iy$. Encontre:

16. $\operatorname{Im} z^3$, $(\operatorname{Im} z)^3$
17. $\operatorname{Re}(1/\bar{z})$
18. $\operatorname{Im}\left[(1 + i)^8 z^2\right]$
19. $\operatorname{Re}(1/\bar{z}^2)$
20. **(Leis da adição e multiplicação)** Demonstre as seguintes leis para os números complexos, a partir das leis correspondentes para os números reais.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \; z_1 z_2 = z_2 z_1 \qquad (\textit{Leis comutativas})$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \qquad (\textit{Leis associativas})$$
$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \qquad (\textit{Leis distributivas})$$
$$0 + z = z + 0 = z,$$
$$z + (-z) = (-z) + z = 0, \qquad z \cdot 1 = z.$$

13.2 Forma Polar dos Números Complexos. Potências e Raízes

O plano complexo torna-se ainda mais útil e dá-nos uma compreensão ainda melhor das operações aritméticas com números complexos se, além das coordenadas xy, também empregarmos as coordenadas polares usuais r, θ definidas por

(1) $$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta.$$

Vemos então que $z = x + iy$ assume a chamada **forma polar**

(2) $$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta).$$

r é chamado de **valor absoluto** ou **módulo** de z, sendo representado por $|z|$. Logo,

(3) $$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}\,.$$

Geometricamente, $|z|$ é a distância entre o ponto z e a origem (Fig. 320). Similarmente, $|z_1 - z_2|$ é a distância entre z_1 e z_2 (Fig. 321).

θ é o chamado de **argumento** de z, sendo representado por arg z. Portanto (Fig. 320),

(4) $$\theta = \arg z = \arctan\frac{y}{x} \qquad (z \neq 0).$$

Geometricamente, θ é o ângulo medido a partir do eixo x positivo até OP na Fig. 320. Aqui, como no cálculo, ***todos os ângulos são medidos em radianos e têm a direção positiva no sentido anti-horário.***

Para $z = 0$, esse ângulo θ é indefinido. (Por quê?) Para um dado $z \neq 0$, ele é determinado somente para múltiplos inteiros de 2π, visto que os senos e os cossenos são periódicos, com um período de 2π. Porém, freqüentemente deseja-se especificar um valor único do arg z de um dado $z \neq 0$. Por esse motivo, define-se o **valor principal** Arg z (com A maiúsculo!) do arg z pela desigualdade dupla

(5) $$-\pi < \text{Arg}\ z \leqq \pi.$$

Então, temos que Arg $z = 0$ para os números reais positivos $z = x$, o que é prático, e Arg $z = \pi$ (não $-\pi$!) para os números z reais negativos, p. ex., $z = -4$. O valor principal (5) será importante quando tratarmos das raízes, dos logaritmos complexos (Seção 13.7) e de certas integrais. Obviamente, para um dado $z \neq 0$, os outros valores de arg z são arg z = Arg $z \pm 2n\pi$ ($n = \pm1, \pm2, \cdots$).

EXEMPLO 1 Forma Polar dos Números Complexos. Valor Principal, Arg *z*

$z = 1 + i$ (Fig. 322) tem a forma polar $z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{1}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{1}{4}\pi)$. Logo, obtemos

$$|z| = \sqrt{2}, \qquad \arg z = \tfrac{1}{4}\pi \pm 2n\pi\ (n = 0, 1, \cdots), \qquad \text{e} \qquad \text{Arg}\ z = \tfrac{1}{4}\pi \quad \text{(o valor principal).}$$

Similarmente, $z = 3 + 3\sqrt{3}i = 6\,(\cos\frac{1}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\pi)$, $|z| = 6$, e Arg $z = \frac{1}{3}\pi$.. ■

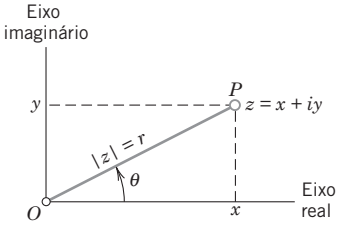


Fig. 320. Plano complexo, forma polar de um número complexo

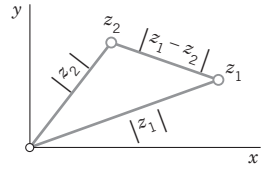


Fig. 321. Distância entre dois pontos no plano complexo

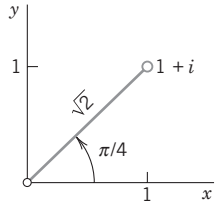


Fig. 322. Exemplo 1

CUIDADO! Ao usarmos (4), precisamos nos atentar para o quadrante onde z está situado, visto que tan θ tem período π, de modo que os argumentos de z e $-z$ têm a mesma tangente. *Exemplo:* para $\theta_1 = \arg(1 + i)$ e $\theta_2 = \arg(-1 - i)$, temos $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 = 1$.

Desigualdade do Triângulo

Desigualdades como $x_1 < x_2$ fazem sentido entre números *reais*, porém não entre os complexos, pois *não há nenhum modo natural de ordenar números complexos*. Entretanto, as desigualdades entre valores absolutos (que são reais!), como $|z_1| < |z_2|$ (significando que z_1 está mais próximo da origem que z_2), são de grande importância. O "pão de cada dia" do analista de números complexos é a **desigualdade do triângulo**

(6) $$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$$ (Fig. 323)

que usaremos com bastante freqüência. Percebe-se essa desigualdade quando se nota que os três pontos 0, z_1 e $z_1 + z_2$ são os vértices de um triângulo (Fig. 323) de lados $|z_1|$, $|z_2|$, e $|z_1 + z_2|$, sendo que um lado qualquer não pode exceder a soma dos outros dois lados. Deixamos a prova formal disso a cargo do leitor (Problema 35). (O triângulo se degenera se z_1 e z_2 se situarem numa mesma reta passando pela origem.)

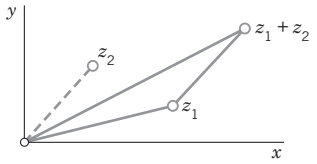


Fig. 323. Desigualdade do triângulo

Por indução, obtemos de (6) a **desigualdade generalizada do triângulo**

(6*) $$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|;$$

ou seja, *o valor absoluto de uma soma não pode exceder a soma dos valores absolutos dos termos.*

EXEMPLO 2 Desigualdade do Triângulo

Se $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -2 + 3i$, então (esboce uma figura!)

$$|z_1 + z_2| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} = 4{,}123 < \sqrt{2} + \sqrt{13} = 5{,}020.$$ ■

Multiplicação e Divisão na Forma Polar

Isto nos dará uma compreensão "geométrica" da multiplicação e da divisão. Tomemos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad \text{e} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2).$$

Multiplicação. Por (3) da Seção 13.1, o produto é primeiramente

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)].$$

As regras da adição de senos e cossenos [(6) no Apêndice A3.1] agora fornecem

(7) $$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)].$$

Tomando os valores absolutos em ambos os lados de (7), vemos que *o valor absoluto de um produto é igual ao* ***produto*** *dos valores absolutos dos fatores.*

(8) $$|z_1z_2| = |z_1||z_2|.$$

Considerando os argumentos em (7), mostra-se que *o argumento de um produto é igual à* ***soma*** *dos argumentos dos fatores,*

(9) $$\arg (z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad \text{(para múltiplos inteiros de } 2\pi\text{)}.$$

Divisão. Temos $z_1 = (z_1/z_2)z_2$. Logo, $|z_1| = |(z_1/z_2)z_2| = |z_1/z_2||z_2|$ e, fazendo a divisão por $|z_2|$,

(10) $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0).$$

Similarmente, $\arg z_1 = \arg [(z_1/z_2)z_2] = \arg (z_1/z_2) + \arg z_2$ e a subtração de $\arg z_2$ fornece

(11) $$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \qquad \text{(para múltiplos inteiros de } 2\pi\text{)}.$$

Combinando (10) e (11), temos também o análogo de (7),

(12) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)\right].$$

Para compreender essa fórmula, note que ela corresponde à forma popular de um número complexo de valor absoluto r_1/r_2 e ao argumento $\theta_1 - \theta_2$. Mas estes correspondem ao valor absoluto e ao argumento de z_1/z_2, conforme se pode ver por (10), (11) e pelas formas polares de z_1 e z_2.

EXEMPLO 3 Ilustração das Fórmulas (8)-(11)

Consideremos $z_1 = -2 + 2i$ e $z_2 = 3i$. Então $z_1z_2 = -6 - 6i$, $z_1/z_2 = 2/3 + (2/3)i$. Logo (faça um esboço)

$$|z_1z_2| = 6\sqrt{2} = 3\sqrt{8} = |z_1||z_2|, \qquad |z_1/z_2| = 2\sqrt{2}/3 = |z_1|/|z_2|,$$

e obtemos para os argumentos, $\operatorname{Arg} z_1 = 3\pi/4$, $\operatorname{Arg} z_2 = \pi/2$,

$$\operatorname{Arg} (z_1z_2) = -\frac{3\pi}{4} = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 - 2\pi, \qquad \operatorname{Arg} (z_1/z_2) = \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$ ■

EXEMPLO 4 Potências Inteiras de *z*. A Fórmula de De Moivre

De (8) e (9), com $z_1 = z_2 = z$, obtemos por indução para $n = 0, 1, 2, \cdots$

(13) $$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Similarmente, (12) com $z_1 = 1$ e $z_2 = z^n$ fornece (13) para $n = -1, -2, \cdots$. Para $|z| = r = 1$, a fórmula (13) torna-se a **fórmula de De Moivre**[3]

(13*) $$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Podemos usar isso para exprimir $\cos n\theta$ e $\operatorname{sen} n\theta$ em termos de potências de $\cos \theta$ e $\operatorname{sen} \theta$. Por exemplo, para $n = 2$, temos no lado esquerdo $\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$. Tomando as partes reais e imaginárias em ambos os lados de (13*), com $n = 2$, chegamos às fórmulas familiares

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta, \qquad \operatorname{sen} 2\theta = 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta.$$

Isso mostra que os métodos *complexos* freqüentemente simplificam a obtenção de fórmulas *reais*. Tente fazer isso para $n = 3$. ■

Raízes

Se $z = w^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, então cada valor de w corresponde a *um* valor de z. Veremos imediatamente que, inversamente, a um dado $z \neq 0$ correspondem precisamente n valores distintos de w. Cada um desses valores é chamado da ***n*-ésima** raiz de z e escrevemos

(14) $$w = \sqrt[n]{z}\,.$$

Logo, esse símbolo é ***multivalente***, ou seja, possui *n valores*. Os n valores de $\sqrt[n]{z}$ podem ser obtidos do seguinte modo. Escrevemos z e w na forma polar

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \qquad \text{e} \qquad w = R(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi).$$

[3] ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754), matemático francês, foi o pioneiro no uso dos números complexos em trigonometria e também prestou contribuições à teoria da probabilidade (veja a Seção 24.8).

Então, a equação $w^n = z$ torna-se, pela fórmula de De Moivre (com ϕ no lugar de θ)

$$w^n = R^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = z = r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi).$$

Os valores absolutos em ambos os lados têm que ser iguais; portanto, $R^n = r$, de modo que $R = \sqrt[n]{r}$, onde $\sqrt[n]{r}$ é um número real positivo (um valor absoluto precisa ser não-negativo!) e, portanto, unicamente determinado. Igualando os argumentos $n\phi$ e θ e lembrando que θ é determinado somente para múltiplos inteiros de 2π, obtemos

$$n\phi = \theta + 2k\pi, \qquad \text{portanto,} \qquad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

onde k é um inteiro. Para $k = 0, 1, \cdots, n - 1$, temos n valores *distintos* de w. Outros inteiros de k forneceriam os valores já obtidos. Por exemplo, $k = n$ dá $2k\pi/n = 2\pi$, logo fornece o valor de w correspondente a $k = 0$ etc. Conseqüentemente, para $z \neq 0$, $\sqrt[n]{z}$ tem os n valores distintos

(15)
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

onde $k = 0, 1, \cdots, n - 1$. Esses n valores situam-se num círculo de raio $\sqrt[n]{r}$ centrado na origem e constituem os vértices de um polígono regular de n lados. O valor de $\sqrt[n]{z}$ obtido tomando-se em (15) o valor principal de $\arg z$ e $k = 0$ é chamado de **valor principal** de $w = \sqrt[n]{z}$.

Em (15), fazendo $z = 1$, temos $|z| = r = 1$ e $\operatorname{Arg} z = 0$. Então (15) dá

(16)
$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n - 1.$$

Esses n valores são chamados de ***n*-ésimas raízes da unidade**. Eles se situam sobre o círculo de raio 1 e centro 0, resumidamente chamado de **círculo unitário** (e usado com muita freqüência!). As Figs. 324-326 mostram $\sqrt[3]{1} = 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$, $\sqrt[4]{1} = \pm 1, \pm i$, e $\sqrt[5]{1}$.

Se, em (16), ω denota o valor correspondente a $k = 1$, então os n valores de $\sqrt[n]{1}$ podem ser escritos como

$$1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}.$$

De modo mais geral, se w_1 for uma n-ésima raiz qualquer de um número complexo arbitrário z ($\neq 0$), então, em (15), os n valores de $\sqrt[n]{z}$ são

(17)
$$w_1, \qquad w_1\omega, \qquad w_1\omega^2, \qquad \cdots, \qquad w_1\omega^{n-1}$$

uma vez que, multiplicar w_1 por ω^k corresponde a aumentar o argumento de w_1 por $2k\pi/n$. A fórmula (17) motiva a introdução das raízes da unidade e mostra a sua utilidade.

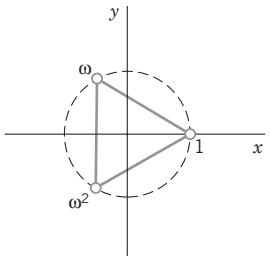


Fig. 324. $\sqrt[3]{1}$

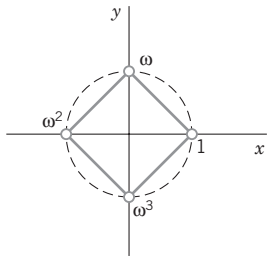


Fig. 325. $\sqrt[4]{1}$

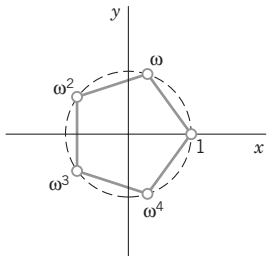


Fig. 326. $\sqrt[5]{1}$

PROBLEMAS PROPOSTOS 13.2

1–8 FORMA POLAR

Resolva esses problemas com bastante cuidado, visto ser freqüente a necessidade das formas polares. Represente na forma polar e faça o gráfico no plano complexo, como na Fig. 322. Mostre os detalhes do que fizer.

1. $3 - 3i$

2. $2i, -2i$

3. -5

4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi i$

5. $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

6. $\dfrac{3\sqrt{2} + 2i}{-\sqrt{2} - (2/3)i}$

7. $\dfrac{-6 + 5i}{3i}$

8. $\dfrac{2 + 3i}{5 + 4i}$

9–15 ARGUMENTO PRINCIPAL

Determine o valor principal do argumento.

9. $-1 - i$
10. $-20 + i$, $-20 - i$
11. $4 \pm 3i$
12. $-\pi^2$
13. $7 \pm 7i$
14. $(1 + i)^{12}$
15. $(9 + 9i)^3$

16–20 CONVERSÃO PARA $x + iy$

Represente na forma $x + iy$ e faça o gráfico no plano complexo.

16. $\cos \frac{1}{2}\pi + i \operatorname{sen} (\pm \frac{1}{2}\pi)$
17. $3(\cos 0{,}2 + i \operatorname{sen} 0{,}2)$
18. $4(\cos \frac{1}{3}\pi \pm i \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi)$
19. $\cos(-1) + i \operatorname{sen}(-1)$
20. $12(\cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi)$

21–25 RAÍZES

Calcule e represente graficamente todas as raízes no plano complexo.

21. $\sqrt{-i}$
22. $\sqrt[8]{1}$
23. $\sqrt[4]{-1}$
24. $\sqrt[3]{3 + 4i}$
25. $\sqrt[5]{-1}$

26. PROJETO DE EQUIPE. Raiz Quadrada. (**a**) Mostre que $w = \sqrt{z}$ tem os valores

$$w_1 = \sqrt{r}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right],$$

$$(18)\quad w_2 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] = -w_1.$$

(b) Obtenha de (18) a fórmula, freqüentemente de maior praticidade,

$$(19)\quad \sqrt{z} = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z| + x)} + (\text{sinal de } y)\, i\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z| + x)}\right]$$

onde o sinal $y = 1$ se $y \geqq 0$, sinal de $y = -1$ se $y < 0$ e todas as raízes quadradas dos números positivos são consideradas com o sinal positivo. *Sugestão:* use (10) no Apêndice A3.1 com $x = \theta/2$.

(c) Calcule as raízes quadradas de $4i$, $16 - 30i$, e $9 + 8\sqrt{7}\,i$, tanto por (18) quanto por (19), e faça comentários sobre a quantidade de trabalho envolvido.

(d) Faça o mesmo para outros exemplos de sua própria escolha e aplique um método de verificar seus resultados.

27–30 EQUAÇÕES

Calcule e represente graficamente todas as soluções, mostrando os detalhes do que fizer:

27. $z^2 - (8 - 5i)z + 40 - 20i = 0$ (Use (19).)
28. $z^4 + (5 - 14i)z^2 - (24 + 10i) = 0$
29. $8z^2 - (36 - 6i)z + 42 - 11i = 0$
30. $z^4 + 16 = 0$ então use as soluções do fator $z^4 + 16$ no fator quadrático com coeficientes *reais*.
31. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Raízes da Unidade e seus Gráficos. Escreva um programa para calcular essas raízes e para representá-las graficamente como pontos no círculo unitário. Aplique o programa a $z^n = 1$ com $n = 2, 3, \cdots, 10$. Então, estenda o programa de uma para um número arbitrário de raízes, usando uma idéia fornecida perto do final deste texto, e aplique o programa a exemplos de sua escolha.

32–35 DESIGUALDADES E UMA EQUAÇÃO

Verifique ou prove conforme o indicado.

32. (Re e Im) Prove $|\text{Re } z| \leqq |z|$, $|\text{Im } z| \leqq |z|$.
33. (Igualdade do paralelogramo) Prove

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Explique esse nome.
34. (Desigualdade do triângulo) Verifique (6) para $z_1 = 4 + 7i$, $z_2 = 5 + 2i$.
35. (Desigualdade do triângulo) Prove (6).

13.3 Derivada. Função Analítica

Nosso estudo das funções complexas envolverá conjuntos de pontos no plano complexo. Os mais importantes são os seguintes.

Círculos e Discos. Meios-planos

Já falamos do **círculo unitário** $|z| = 1$ (Fig. 327) na Seção 13.2. A Fig. 328 mostra um círculo geral de raio ρ e centro a. Sua equação é

$$|z - a| = \rho$$

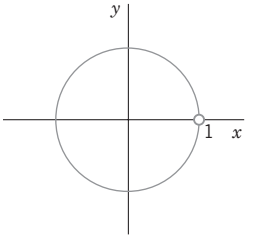


Fig. 327. Círculo unitário

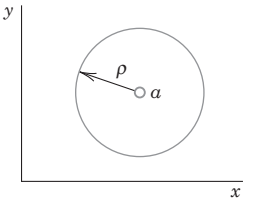


Fig. 328. Círculo no plano complexo

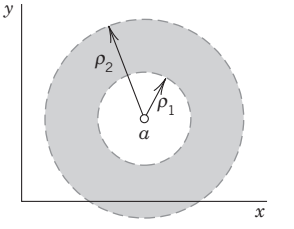


Fig. 329. Anel no plano complexo

pois este é o conjunto de todos os z cuja distância $|z - a|$ do centro a é igual a ρ. Dessa forma, seu interior (**"disco circular aberto"**) é dado por $|z - a| < \rho$; seu interior mais o círculo em si mesmo (**"disco circular fechado"**) é dado por $|z - a| \leqq \rho$ e seu exterior por $|z - a| > \rho$. Como um exemplo, faça um esboço disso para $a = 1 + i$ e $\rho = 2$, para se certificar de que compreendeu essas desigualdades.

Um disco circular aberto $|z - a| < \rho$ é também chamado de uma **vizinhança** de a ou, mais precisamente, uma *vizinhança* ρ de a. E a tem um número infinitamente grande delas, uma para cada valor de ρ (> 0), sendo a um ponto em cada uma delas, por definição!

Na literatura moderna, *qualquer conjunto* contendo uma vizinhança ρ de a é também chamado de uma *vizinhança* de a.

A Fig. 329 mostra um **espaço anular aberto** (anel circular) $\rho_1 < |z - a| < \rho_2$, de que precisaremos mais tarde. Este é o conjunto de todo z cuja distância $|z - a|$ em relação a a é maior que ρ_1, porém menor que ρ_2. Similarmente, o **espaço anular fechado** $\rho_1 \leqq |z - a| \leqq \rho_2$ inclui os dois círculos.

Meios-planos. Chamamos de **meio-plano** *superior* (aberto) o conjunto de todos os pontos $z = x + iy$ tais que $y > 0$. Similarmente, a condição $y < 0$ define o *meio-plano inferior*; $x > 0$, o *meio-plano direito*, e $x < 0$, o *meio-plano esquerdo*.

Para Referência: Conceitos sobre Conjuntos no Plano Complexo

Para nossa discussão dos conjuntos especiais, iremos agora mencionar alguns conceitos gerais relacionados aos conjuntos, de que necessitaremos nos Capítulos 13-18; tenha em mente que você pode encontrá-los aqui.

Chamamos de **conjunto de pontos** no plano complexo a qualquer tipo de coleção de um número finita ou infinitamente grande de pontos. Exemplos disso são as soluções de uma equação quadrática, os pontos de uma linha, os pontos no interior de um círculo, bem como os conjuntos que acabamos de discutir.

Dizemos que um conjunto S é **aberto** se todos os pontos de S tiverem uma vizinhança consistindo inteiramente em pontos pertencentes a S. Por exemplo, os pontos no interior de um círculo ou de um quadrado formam um conjunto aberto, o mesmo ocorrendo com os pontos do meio-plano direito $\text{Re } z = x > 0$.

Dizemos que um conjunto S é **conectado** se dois quaisquer de seus pontos puderem ser unidos por uma linha quebrada de um número finitamente grande de segmentos retilíneos, com todos esses pontos pertencentes a S. Um conjunto aberto e conectado é chamado de um **domínio**. Portanto, um disco aberto e um anel aberto são domínios. Um quadrado aberto com uma diagonal removida não é um domínio, pois esse conjunto não é conectado. (Por quê?)

O **complemento** de um conjunto S no plano complexo é o conjunto de todos os pontos do plano complexo que ***não pertencem*** a S. Um conjunto S é chamado de **fechado** se seu complemento for aberto. Por exemplo, os pontos sobre e dentro do círculo unitário formam um conjunto fechado ("disco solitário fechado"), uma vez que seu complemento $|z| > 1$ é aberto.

Um **ponto de fronteira** de um conjunto S corresponde a um ponto do qual toda fronteira contém tanto pontos pertencentes quanto pontos não-pertencentes a S. Por exemplo, os pontos de fronteira de um anel são os pontos sobre os dois círculos de fronteira. Fica claro que, se um conjunto S for aberto, então não há ponto de fronteira pertencente a S; se S for fechado, então todos os pontos de fronteira pertencem a S. O conjunto de todos os pontos de fronteira de um conjunto S é chamado de **fronteira** de S.

Uma **região** é um conjunto compreendendo um domínio mais, talvez, de alguns ou todos os seus pontos de fronteira. **CUIDADO!** "Domínio" é o termo *moderno* para um conjunto conectado aberto. Não obstante, alguns autores ainda chamam um domínio de "região" e outros não fazem qualquer distinção entre os dois termos.

Função Complexa

A análise complexa trata das funções complexas que são deriváveis em algum domínio. Logo, devemos primeiro dizer o que consideramos ser uma função complexa, para então definirmos os conceitos de limite e derivada no caso complexo. Essa discussão será similar à que se faz no cálculo. Não obstante, ela necessita de uma maior atenção, pois apresentará interessantes diferenças básicas entre o cálculo real e o complexo.

Lembre do cálculo que uma função *real* f definida num conjunto S de números reais (usualmente um intervalo) é uma regra que associa a cada x em S um número real $f(x)$, chamado de *valor* de f em x. Agora, no caso complexo, S é um conjunto de números *complexos*. E uma **função** f definida em S é uma regra que associa a cada z em S um número complexo w, chamado de *valor* de f em z. Escrevemos

$$w = f(z).$$

Aqui, z varia em S e é chamado de **variável complexa**. O conjunto S é chamado de *domínio de definição* de f ou, resumidamente, de **domínio** de f. (Na maioria dos casos, S será aberto e conectado, sendo, portanto, um domínio como o definido há pouco.)

Exemplo: $w = f(z) = z^2 + 3z$ é uma função complexa definida para todo z; ou seja, seu domínio S é todo o plano complexo.

O conjunto de todos os valores de uma função f é chamado de **imagem** de f.

w é complexo e escrevemos $w = u + iv$, onde u e v são as partes real e imaginária, respectivamente. Agora, w depende de $z = x + iy$. Logo, u torna-se uma função real de x e y, do mesmo modo que v. Portanto, podemos escrever

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Isso mostra que uma função *complexa* $f(z)$ é equivalente a um *par* de *funções reais* $u(x, y)$ e $v(x, y)$, cada qual dependendo de duas variáveis reais x e y.

EXEMPLO 1 Função de uma Variável Complexa

Considere $w = f(z) = z^2 + 3z$. Encontre u e v e calcule o valor de f em $z = 1 + 3i$.

Solução. $u = \text{Re } f(z) = x^2 - y^2 + 3x$ e $v = 2xy + 3y$. Também,

$$f(1 + 3i) = (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i.$$

Isso mostra que $u(1, 3) = -5$ and $v(1, 3) = 15$. Verifique isso usando as expressões para u e v. ■

EXEMPLO 2 Função de uma Variável Complexa

Considere $w = f(z) = 2iz + 6\bar{z}$. Encontre u e v e calcule o valor de f em $z = \frac{1}{2} + 4i$.

Solução. $f(z) = 2i(x + iy) + 6(x - iy)$ dá $u(x, y) = 6x - 2y$ e $v(x, y) = 2x - 6y$. Também,

$$f(\tfrac{1}{2} + 4i) = 2i(\tfrac{1}{2} + 4i) + 6(\tfrac{1}{2} - 4i) = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i.$$

Verifique isso como no Exemplo 1. ■

Observações sobre a Notação e a Terminologia

1. Estritamente falando, $f(z)$ denota o valor de f em z, porém é um abuso conveniente de linguagem falar sobre *a função* $f(z)$ (em vez *da função* f), o que evidencia a notação da variável independente.

2. Supomos que todas as funções sejam ***relações univalentes***, como o usual: a cada z em S corresponde apenas *um* valor $w = f(z)$ (porém, naturalmente, diversos valores de z podem resultar num mesmo valor $w = f(z)$, do mesmo modo que no cálculo). Dessa forma, *não utilizaremos* o termo "função multivalente" (usado em alguns livros de análise complexa) para uma relação multivalente, onde a um valor de z corresponde mais de um w.

Limite, Continuidade

Dizemos que uma função $f(z)$ possui o **limite** l à medida que z se aproxima de um ponto z_0, escrito como

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l, \tag{1}$$

se f for definida numa vizinhança de z_0 (excetuando-se talvez no próprio z_0) e se os valores de f estiverem "próximos" de l para todo z "próximo" de z_0; em termos precisos, se, para todo ϵ real positivo pudermos encontrar um δ real positivo tal que, para todo $z \neq z_0$ no disco $|z - z_0| < \delta$ (Fig. 330), tivermos

$$|f(z) - l| < \epsilon; \tag{2}$$

geometricamente, se para todo $z \neq z_0$ nesse disco δ, o valor de f se situar no disco (2).

Formalmente, essa definição é similar à do cálculo, porém há uma grande diferença. Enquanto, no caso real, x só pode se aproximar de x_0 ao longo do eixo real, aqui, por definição, z pode se aproximar de z_0 ***a partir de qualquer direção*** do plano complexo. Isso será bastante essencial no que se segue.

Se um limite existir, ele é único. (Veja em Projeto de Equipe 26.)

Dizemos que uma função $f(z)$ é **contínua** em $z \neq z_0$ se $f(z_0)$ for definida e

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{3}$$

Note que, pela definição de limite, isso implica que $f(z)$ é definida em alguma vizinhança de z_0.

Dizemos que $f(z)$ é *contínua em um domínio* se ela for contínua em cada ponto desse domínio.

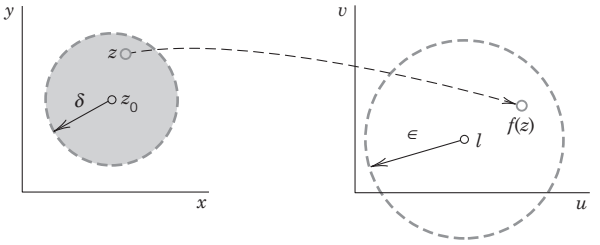


Fig. 330. Limite

Derivada

A **derivada** de uma função complexa f num ponto z_0 é escrita como $f'(z_0)$, sendo definida por

(4)
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

desde que esse limite exista. Então, dizemos que f é **derivável** em z_0. Se escrevermos $\Delta z = z - z_0$, teremos $z = z_0 + \Delta z$ e (4) assume a forma

(4′)
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

Agora, vem um ***ponto importante***. Lembre que, pela definição de limite, $f(z)$ é definida numa vizinhança de z_0 e, em (4′), z pode se aproximar de z_0 a partir de qualquer direção no plano complexo. Logo, a derivabilidade de z_0 significa que, ao longo de qualquer caminho, z aproxima-se de z_0, o quociente em (4′) sempre se aproxima de um certo valor e todos esses valores são iguais. Isso é importante e deve-se tê-lo em mente.

EXEMPLO 3 **Derivabilidade. Derivada**

A função $f(z) = z^2$ é derivável para todo z e possui a derivada $f'(z) = 2z$ porque

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

■

*As **regras de derivação** são as mesmas do cálculo real*, visto que suas provas são literalmente as mesmas. Portanto, para funções analíticas quaisquer f e g e a constante c, temos

$$(cf)' = cf', \quad (f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

bem como a regra da cadeia e a regra da potência $(z^n)' = nz^{n-1}$ (com n inteiro).

Além disso, se $f(z)$ for derivável em z_0, ela é contínua em z_0. (Veja em Projeto de Equipe 26.)

EXEMPLO 4 **$\bar{z}$ Não-derivável**

Pode vir a ser uma surpresa o fato de haver muitas funções complexas que não têm derivadas num ponto qualquer. Por exemplo, $f(z) = \bar{z} = x - iy$ é uma função desse tipo. Para vermos isso, escrevemos $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ e obtemos

(5)
$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\,.$$

Se $\Delta y = 0$, isso é $+1$. Se $\Delta x = 0$, isso é -1. Portanto, (5) aproxima-se de $+1$ ao longo do caminho I na Fig. 331, mas aproxima-se de -1 ao longo do caminho II. Logo, por definição, o limite de (5) à medida que $\Delta z \to 0$ não existe para um z qualquer. ■

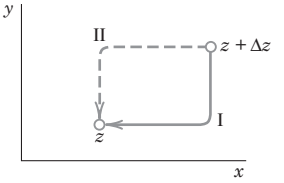


Fig. 331. Caminhos em (5)

Por mais surpreendente que o Exemplo 4 possa ser, ele simplesmente ilustra o fato de que a derivabilidade de uma função *complexa* é uma exigência um tanto quanto rigorosa.

A idéia da prova (aproximação de z a partir de direções diferentes) é fundamental e será usada de novo como um argumento de crucial importância na próxima seção.

Funções Analíticas

A análise complexa trata da teoria e aplicação das "funções analíticas", ou seja, funções que são deriváveis em algum domínio, o que possibilita a realização do "cálculo no caso complexo". A definição é a seguinte.

DEFINIÇÃO

Analiticidade

Diz-se que uma função $f(z)$ é *analítica num domínio* D se $f(z)$ for definida e derivável em todos os pontos de D. Diz-se que a função $f(z)$ é *analítica num ponto* $z = z_0$ em D se $f(z)$ for analítica numa vizinhança de z_0.

Além disso, chamamos de **função analítica** aquela que for analítica em *algum* domínio.

Logo, a analiticidade de $f(z)$ em z_0 significa que $f(z)$ possui uma derivada em todo ponto de alguma vizinhança de z_0 (incluindo o próprio z_0, visto que, por definição, z_0 é um ponto de todas as suas vizinhanças). O *motivo* desse conceito é que não é de interesse prático se uma função for derivável somente num único ponto z_0 ao mesmo tempo que não o seja numa vizinhança de z_0. O Projeto de Equipe 26 dá um exemplo disso.

Um termo mais moderno para *analítico em D* é *holomórfico em D*.

EXEMPLO 5 **Polinômios, Funções Racionais**

As potências inteiras não-negativas $1, z, z^2, \cdots$ são analíticas em todo o plano complexo, o mesmo ocorrendo com os **polinômios**, ou seja, as funções da forma

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

onde $c_0, \cdots, c_n$ são constantes complexas.

Dizemos que o quociente de dois polinômios $g(z)$ e $h(z)$,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

é uma **função racional**. Essa função f é analítica, excetuando-se nos pontos onde $h(z) = 0$; aqui, supomos que os fatores comuns de g e h tenham sido cancelados.

Muitas outras funções analíticas serão consideradas nas próximas seções e capítulos. ■

Os conceitos discutidos nesta seção são uma extensão dos conceitos familiares do cálculo. O conceito mais importante é o de função analítica, que é a preocupação exclusiva da análise complexa. Embora diversas funções simples não sejam analíticas, a grande variedade das demais funções constituirão um ramo de extrema beleza da matemática e de grande utilidade na engenharia e na física.

PROBLEMAS PROPOSTOS 13.3

1–10 CURVAS E REGIÕES DE INTERESSE PRÁTICO

Encontre e faça um esboço ou gráfico dos conjuntos no plano complexo dados por

1. $|z - 3 - 2i| = \frac{4}{3}$

2. $1 \leqq |z - 1 + 4i| \leqq 5$

3. $0 < |z - 1| < 1$

4. $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$

5. $\operatorname{Im} z^2 = 2$

6. $\operatorname{Re} z > -1$

7. $|z + 1| = |z - 1|$

8. $|\operatorname{Arg} z| \leqq \frac{1}{4}\pi$

9. $\operatorname{Re} z \leqq \operatorname{Im} z$

10. $\operatorname{Re}(1/z) < 1$

11. PROJETO ESCRITO. Conjuntos no Plano Complexo. Estenda a parte do texto para os conjuntos no plano complexo, enunciando essa extensão com suas próprias palavras e incluindo exemplos de sua própria escolha, fazendo então comparações com o cálculo quando isso for aplicável.

FUNÇÕES E DERIVADAS COMPLEXAS

12–15 **Valores Complexos.** Encontre $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$. Calcule também seus valores no ponto dado z.

12. $f = 3z^2 - 6z + 3i$, $z = 2 + i$

13. $f = z/(z + 1)$, $z = 4 - 5i$

14. $f = 1/(1 - z)$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$

15. $f = 1/z^2$, $z = 1 + i$

16–19 **Continuidade.** Descubra (e justifique) se $f(z)$ é contínua em $z = 0$, considerando que, se $f(0) = 0$ e para $z \neq 0$, a função f é igual a:

16. $[\operatorname{Re}(z^2)]/|z|^2$

17. $[\operatorname{Im}(z^2)]/|z|$

18. $|z|^2 \operatorname{Re}(1/z)$

19. $(\operatorname{Im} z)/(1 - |z|)$

20–24 **Derivada.** Derive

20. $(z^2 - 9)/(z^2 + 1)$

21. $(z^3 + i)^2$

22. $(3z + 4i)/(1{,}5iz - 2)$

23. $i/(1 - z)^2$

24. $z^2/(z + i)^2$

25. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Representação Gráfica de Funções. Obtenha e represente graficamente $\operatorname{Re} f$,

Im f e $|f|$ como superfícies sobre o plano z. Faça também o gráfico das duas famílias de curvas Re $f(z) = const.$ e Im $f(z) = const.$ na mesma figura, e das curvas $|f(z)| = const$ em outra figura, onde (a) $f(z) = z^2$, (b) $f(z) = 1/z$, (c) $f(z) = z^4$.

26. PROJETO DE EQUIPE. Limite, Continuidade, Derivada

(a) Limite. Prove que (1) é equivalente ao par de relações

$$\lim_{z \to z_0} \text{Re } f(z) = \text{Re } l, \qquad \lim_{z \to z_0} \text{Im } f(z) = \text{Im } l.$$

(b) Limite. Se $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existir, mostre que esse limite é único.

(c) Continuidade. Se $z_1, z_2, \cdots$ forem números complexos para os quais $\lim_{n \to \infty} z_n = a$ e se $f(z)$ for contínua em $z = a$, mostre que $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(a)$.

(d) Continuidade. Se $f(z)$ for derivável em z_0, mostre que $f(z)$ é contínua em z_0.

(e) Derivabilidade. Mostre que $f(z) = \text{Re } z = x$ não é derivável num z qualquer. Você seria capaz de encontrar outras funções como essa?

(f) Derivabilidade. Mostre que $f(z) = |z|^2$ é derivável somente em $z = 0$; não sendo, portanto, analítica em nenhum outro ponto.

13.4 Equações de Cauchy-Riemann. Equação de Laplace

As equações de Cauchy-Riemann são as mais importantes deste capítulo e um dos pilares sobre os quais a análise complexa se fundamenta. Elas fornecem um critério (um teste) para a analiticidade de uma função complexa

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Grosso modo, f é analítica num domínio D se e somente se as derivadas parciais primeiras de u e v satisfizerem às duas **equações de Cauchy-Riemann**[4]

$$\textbf{(1)} \qquad u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

em qualquer lugar em D; aqui, $u_x = \partial u/\partial x$ e $u_y = \partial u/\partial y$ (e similarmente para v) são as notações usuais para as derivadas parciais. A formulação precisa desse enunciado será dada nos Teoremas 1 e 2.

Exemplo: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ é analítica para todo z (veja o Exemplo 3 da Seção 13.3), e $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$ satisfazem a (1), ou seja, $u_x = 2x = v_y$ bem como $u_y = -2y = -v_x$. Outros exemplos serão dados posteriormente.

TEOREMA 1

Equações de Cauchy-Riemann

Consideremos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sejam definidas e contínuas em alguma vizinhança de um ponto $z = x + iy$ e deriváveis no próprio z. Então, nesse ponto, as derivadas parciais de primeira ordem de u e v existem e satisfazem às equações de Cauchy-Riemann (1).

Logo, se $f(z)$ for analítica num domínio D, essas derivadas parciais existem e satisfazem a (1) *em todos os pontos de D.*

PROVA Por suposição, a derivada $f'(z)$ em z existe e é dada por

$$\textbf{(2)} \qquad f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

A idéia da prova é muito simples. Pela definição de limite no caso complexo (Seção 13.3), podemos fazer Δz aproximar-se de zero ao longo de qualquer caminho numa vizinhança de z. Portanto, podemos escolher os dois caminhos I e II na Fig. 332 e igualarmos os resultados. Comparando as partes reais, obteremos a primeira equação de Cauchy-Riemann e, comparando as partes imaginárias, obteremos a segunda equação. Os detalhes técnicos são os seguintes.

Escrevemos $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Então $z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$ e, em termos de u e v, a derivada em (2) torna-se

[4] O matemático francês AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (veja Seção 2.5) e os matemáticos alemães BERNHARD RIEMANN (1826–1866) e KARL WEIERSTRASS (1815–1897; veja também Seção 15.5) são os fundadores da análise complexa. Riemann recebeu seu Ph.D. (em 1851) sob a orientação de Gauss (Seção 5.4) em Göttingen, onde ele também lecionou até vir a falecer com apenas 39 anos de idade. Ele introduziu o conceito de integral como é usado nos cursos de cálculo básico, e prestou importantes contribuições ao estudo das equações diferenciais, teoria dos números e física matemática. Também elaborou a chamada geometria riemanniana, que é a base matemática da teoria da relatividade de Einstein; veja a Ref. [GR9] no Apêndice 1.

$$(3) \qquad f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Escolhemos primeiro o caminho I na Fig. 332. Portanto, primeiramente fazemos $\Delta y \to 0$ e depois $\Delta x \to 0$. Após Δy se anular, $\Delta z = \Delta x$. Então, (3) torna-se, se escrevermos primeiro os dois termos em u e depois os dois termos em v,

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}.$$

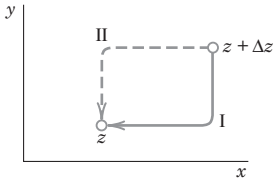


Fig. 332. Caminhos em (2)

Uma vez que $f'(z)$ existe, os dois limites reais no lado direito existem. Por definição, eles são as derivadas parciais de u e v com relação a x. Logo, a derivada $f'(z)$ de $f(z)$ pode ser escrita como

$$\textbf{(4)} \qquad f'(z) = u_x + iv_x.$$

Similarmente, se escolhermos o caminho II na Fig. 332, primeiramente fazemos $\Delta x \to 0$ e depois $\Delta y \to 0$. Após Δx se anular, $\Delta z = i\Delta y$, de modo que de (3) obtemos agora

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}.$$

Uma vez que $f'(z)$ existe, os limites no lado direito existem e fornecem as derivadas parciais de u e v em relação a y; observando que $1/i = -i$, obtemos, portanto,

$$\textbf{(5)} \qquad f'(z) = -iu_y + v_y.$$

Logo, a existência da derivada $f'(z)$ implica a existência das quatro derivadas parciais em (4) e (5). Igualando as partes reais u_x e u_y em (4) e (5), obtemos a primeira equação de Cauchy-Riemann (1). Igualando as partes imaginárias, chegamos à outra. Isso prova o primeiro enunciado do teorema e implica o segundo, devido à suposição de analiticidade. ■

As fórmulas (4) e (5) são também bastante práticas para o cálculo das derivadas $f'(z)$, conforme veremos.

EXEMPLO 1 **Equações de Cauchy-Riemann**

$f(z) = z^2$ é analítica para todo z. Disso se segue que as equações de Cauchy-Riemann precisam ser satisfeitas (como verificamos anteriormente).

Para $f(z) = \bar{z} = x - iy$, temos $u = x$, $v = -y$, e vemos que a segunda equação de Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x = 0$, é satisfeita, porém a primeira, $u_x = 1 \neq v_y = -1$, não o é. Concluímos que $f(z) = \bar{z}$, não é analítica, o que confirma o Exemplo 4 da Seção 13.3. Note a economia nos cálculos! ■

As equações de Cauchy-Riemann são fundamentais porque são não apenas necessárias, mas também suficientes para que uma função seja analítica. Mais precisamente, verifica-se o seguinte teorema.

TEOREMA 2 **Equações de Cauchy-Riemann**

Se duas funções contínuas e de valores reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de duas variáveis reais x e y tiverem derivadas parciais primeiras ***contínuas*** *que satisfazem às equações de Cauchy-Riemann em algum domínio D, então a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D.*

A prova é mais trabalhosa do que a do Teorema 1 e fica como opcional (veja o Apêndice 4).

Os Teoremas 1 e 2 são de grande importância prática, visto que, usando as equações de Cauchy-Riemann, podemos agora facilmente saber se uma dada função complexa é ou não analítica.

EXEMPLO 2 **Equações de Cauchy-Riemann. Função Exponencial**

A função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ é analítica?

Solução. Temos $u = e^x \cos y$, $v = e^x \operatorname{sen} y$ e, por derivação,

$$u_x = e^x \cos y, \qquad v_y = e^x \cos y$$
$$u_y = -e^x \operatorname{sen} y, \qquad v_x = e^x \operatorname{sen} y.$$

Vemos que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas e concluímos que $f(z)$ é analítica para todo z. ($f(z)$ será o análogo complexo da função e^x, conhecida do cálculo.) ■

EXEMPLO 3 **Uma Função Analítica de Valor Absoluto Constante É Constante**

As equações de Cauchy-Riemann também ajudam na demonstração das propriedades gerais das funções analíticas.

Por exemplo, mostre que, se $f(z)$ for analítica num domínio D e $|f(z)| = k = const.$ em D, então $f(z) = const.$ em D. (A utilização disso será de crucial importância na Seção 18.6 na prova do Teorema 3.)

Solução. Por suposição, $|f|^2 = |u + iv|^2 = u^2 + v^2 = k^2$. Derivando,

$$uu_x + vv_x = 0,$$
$$uu_y + vv_y = 0$$

Agora, usamos $v_x = -u_y$ na primeira equação e $v_y = u_x$ na segunda, para obtermos

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad uu_x - vu_y = 0, \\ &\text{(b)} \quad uu_y + vu_x = 0. \end{aligned}$$

Para eliminarmos u_y, multiplicamos (6a) por u e (6b) por v, e somamos. Similarmente, para eliminarmos u_x, multiplicamos (6a) por $-v$ e (6b) por u, e somamos. Isso fornece

$$(u^2 + v^2)u_x = 0.$$
$$(u^2 + v^2)u_y = 0.$$

Se $k^2 = u^2 + v^2 = 0$, então, $u = v = 0$; logo, $f = 0$. Se $k^2 = u^2 + v^2 \neq 0$, então, $u_x = u_y = 0$. Logo, pelas equações de Cauchy-Riemann, também $v_x = v_y = 0$. Junto, isso implica que $u = const.$ e $v = const.$; logo, $f = const.$ ■

Mencionamos que, se usarmos a forma polar $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e fizermos $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, então as **equações de Cauchy-Riemann** são (Problema 11)

$$\text{(7)} \qquad u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \qquad (r > 0).$$

Equação de Laplace. Funções Harmônicas

A grande importância da análise complexa na matemática para engenharia resulta principalmente do fato de que tanto a parte real quanto a parte imaginária de uma função analítica satisfazem à equação de Laplace, que é a mais importante EDP da física, ocorrendo em gravitação, eletrostática, escoamento de fluidos, condução de calor etc. (veja os Capítulos 12 e 18).

TEOREMA 3 **Equação de Laplace**

Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for analítica num domínio D, então tanto u quanto v satisfazem à **equação de Laplace**

(8) $$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(lê-se ∇^2 como "nabla quadrado") *e*

(9) $$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

em D e têm derivadas parciais segundas contínuas em D.

PROVA Derivando $u_x = v_y$ em relação a x, e $u_y = -v_x$ em relação a y, temos

(10) $$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Agora, a derivada de uma função analítica é ela própria analítica, conforme provaremos depois (na Seção 14.4). Isso implica que u e v possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens; em particular, as derivadas segundas mistas são iguais: $v_{yx} = v_{xy}$. Somando (10), obtemos, portanto, (8). Similarmente, (9) é obtida pela derivação de $u_x = v_y$ em relação a y e de $u_y = -v_x$ em relação a x e subtraindo, usando $u_{xy} = u_{yx}$. ■

As soluções da equação de Laplace com derivadas parciais de segunda ordem ***contínuas*** são chamadas de **funções harmônicas**, sendo sua teoria chamada de **teoria do potencial** (veja também a Seção 12.10). Logo, as partes real e imaginária de uma função analítica são funções harmônicas.

Se duas funções harmônicas u e v satisfizerem às equações de Cauchy-Riemann num domínio D, elas então constituem as partes real e imaginária de uma função analítica f em D. Dessa forma, dizemos que v é uma **função conjugada harmônica** de u em D. (Naturalmente, isso não tem absolutamente nada a ver com o uso do termo "conjugado" para $\bar{z}$.).

EXEMPLO 4 Como Obter uma Função Conjugada Harmônica Através das Equações de Cauchy-Riemann

Verifique que $u = x^2 - y^2 - y$ é harmônica em todo o plano complexo e obtenha uma função conjugada harmônica v de u.

Solução. O cálculo direto nos dá $\nabla^2 u = 0$. Agora, $u_x = 2x$ e $u_y = -2y - 1$. Logo, pelas equações de Cauchy-Riemann, um conjugado v de u precisa satisfazer a

$$v_y = u_x = 2x, \qquad v_x = -u_y = 2y + 1.$$

Integrando a primeira equação em relação a y e derivando o resultado em relação a x, obtemos

$$v = 2xy + h(x), \qquad v_x = 2y + \frac{dh}{dx}.$$

Uma comparação com a segunda equação mostra que $dh/dx = 1$. Isso fornece $h(x) = x + c$. Logo, $v = 2xy + x + c$ (com c sendo uma constante real qualquer) é o conjugado harmônico mais geral de u dado. A função analítica correspondente é

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) = z^2 + iz + ic.$$ ■

O Exemplo 4 ilustra o fato de que *um conjugado de uma dada função harmônica é unicamente determinado para valores correspondentes a constantes aditivas reais arbitrárias*.

As equações de Cauchy-Riemann são as mais importantes deste capítulo. Sua relação com a equação de Laplace abre um grande leque de possibilidades nas aplicações em engenharia e física, conforme veremos no Capítulo 18.

PROBLEMAS PROPOSTOS 13.4

1–10 EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

As seguintes funções são analíticas? [Use (1) ou (7).]

1. $f(z) = z^4$
2. $f(z) = \text{Im}\,(z^2)$
3. $e^{2x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$
4. $f(z) = 1/(1 - z^4)$
5. $e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$
6. $f(z) = \text{Arg}\,\pi z$
7. $f(z) = \text{Re}\,z + \text{Im}\,z$
8. $f(z) = \ln|z| + i\,\text{Arg}\,z$
9. $f(z) = i/z^8$
10. $f(z) = z^2 + 1/z^2$

11. (Equações de Cauchy-Riemann na forma polar) Obtenha (7) a partir de (1).

12–21 FUNÇÕES HARMÔNICAS

As seguintes funções são harmônicas? Em caso afirmativo, encontre uma função analítica correspondente $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

12. $u = xy$
13. $v = xy$
14. $v = -y/(x^2 + y^2)$
15. $u = \ln|z|$
16. $v = \ln|z|$
17. $u = x^3 - 3xy^2$
18. $u = 1/(x^2 + y^2)$
19. $v = (x^2 - y^2)^2$
20. $u = \cos x \cosh y$
21. $u = e^{-x} \operatorname{sen} 2y$

22–24 Determine a, b, c tais que as funções dadas sejam harmônicas, e encontre um conjugado harmônico.

22. $u = e^{3x} \cos ay$
23. $u = \operatorname{sen} x \cosh cy$
24. $u = ax^3 + by^3$

25. (Conjugado harmônico) Mostre que, se u for harmônica e v for um conjugado harmônico de u, então u é um conjugado harmônico de $-v$.

26. PROJETO DE EQUIPE. Condições para que $f(z) = const$. Consideremos que $f(z)$ seja analítica. Prove que cada uma das seguintes condições é suficiente para que $f(z) = const$.

(a) Re $f(z) = const$.

(b) Im $f(z) = const$.

(c) $f'(z) = 0$

(d) $|f(z)| = const$. (veja o Exemplo 3)

27. (Duas fórmulas tradicionais para a derivada). As fórmulas (4), (5) e (11) (a seguir) são ocasionalmente necessárias. Demonstre-as.

(11) $$f'(z) = u_x - iu_y, \qquad f'(z) = v_y + iv_x.$$

28. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Linhas Eqüipotenciais. Escreva um programa para representar num mesmo gráfico as linhas eqüipotenciais $u = const.$ de uma função harmônica u e sua conjugada v. Aplique o programa a (a) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, (b) $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$, (c) $u = e^x \cos y$, $v = e^x \operatorname{sen} y$.

13.5 Função Exponencial

Nas seções restantes deste capítulo, discutiremos as funções complexas elementares de importância básica: a função exponencial, as trigonométricas, a logarítmica etc. Elas serão as contrapartes das funções familiares do cálculo, às quais se reduzem quando $z = x$ for real. Elas são indispensáveis nas aplicações, sendo que algumas delas possuem interessantes propriedades não compartilhadas por suas contrapartes reais.

Começaremos com uma das mais importantes funções analíticas, a **função exponencial** complexa

$$e^z, \qquad \text{também escrita como} \qquad \exp z.$$

A definição de e^z em termos das funções reais e^x, cos y e sen y é

(1) $$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Essa definição é motivada pelo fato de e^z ser uma ***extensão*** natural da função exponencial real e^x do cálculo. A saber:

(A) $e^z = e^x$ para valores reais $z = x$, pois cos $y = 1$ e sen $y = 0$ quando $y = 0$.

(B) e^z é analítica para todo z. (Isso é demonstrado no Exemplo 2 da Seção 13.4.)

(C) A derivada de e^z é e^z, ou seja,

(2) $$(e^z)' = e^z.$$

Isso decorre de (4) da Seção 13.4,

$$(e^z)' = (e^x \cos y)_x + i(e^x \operatorname{sen} y)_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z.$$

OBSERVAÇÃO. Essa definição corresponde a uma discussão relativamente simples. Poderíamos definir e^z por meio da série familiar $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$ substituindo-se x por z, porém teríamos então que discutir as séries complexas nesse estágio ainda bastante prematuro. (Demonstraremos essa conexão na Seção 15.4.)

Outras Propriedades. Uma função $f(z)$ que é analítica para todo z é chamada de **função inteira**. Portanto, e^z é inteira. Do mesmo modo que no cálculo, a ***relação funcional***

(3) $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

verifica-se para qualquer $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Com efeito, por (1),

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2).$$

Uma vez que $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ para essas funções *reais*, através de uma aplicação das fórmulas de adição para as funções cosseno e seno (similares às da Seção 13.2), vemos que

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}[\cos (y_1 + y_2) + i \operatorname{sen} (y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}$$

conforme afirmamos. Um interessante caso especial de (3) é $z_1 = x$, $z_2 = iy$; então,

(4) $$e^z = e^x e^{iy}.$$

Além disso, para $z = iy$, temos, com base em (1), a chamada **fórmula de Euler**

(5) $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Logo, a **forma polar** de um número complexo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, pode agora ser escrita como

(6) $$z = re^{i\theta}.$$

De (5), obtemos

(7) $$e^{2\pi i} = 1$$

bem como as importantes fórmulas (verifique!)

(8) $$e^{\pi i/2} = i, \qquad e^{\pi i} = -1, \qquad e^{-\pi i/2} = -i, \qquad e^{-\pi i} = -1.$$

Uma outra conseqüência de (5) é

(9) $$|e^{iy}| = |\cos y + i \operatorname{sen} y| = \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = 1.$$

Ou seja, para expoentes imaginários puros, a função exponencial possui o valor absoluto 1, um resultado do qual você deve se lembrar. De (9) e (1),

(10) $$|e^z| = e^x. \qquad \text{Logo,} \qquad \arg e^z = y \pm 2n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

uma vez que $|e^z| = e^x$ mostra que (1) é, de fato, e^z na forma polar.

De $|e^z| = e^x \neq 0$ em (10), vemos que

(11) $$e^z \neq 0 \qquad \text{para todo } z.$$

Desse modo, temos aqui uma função inteira que nunca se anula, diferentemente dos polinômios (não-constantes), que também são inteiros (Exemplo 5 da Seção 13.3), porém têm um ponto de zero, como se demonstra algebricamente.

Periodicidade de e^z com período $2\pi i$

(12) $$e^{z+2\pi i} = e^z \qquad \text{para todo } z$$

é uma propriedade básica que decorre de (1) e da periodicidade de cos y e sen y. Logo, todos os valores que podem ser assumidos por $w = e^z$ já são assumidos na faixa horizontal de largura 2π

(13) $$-\pi < y \leqq \pi \qquad \text{(Fig. 333).}$$

Essa faixa infinita é chamada de **região fundamental** de e^z.

EXEMPLO 1 Valores das Funções. Solução das Equações

O cálculo dos valores a partir de (1) não representa nenhum problema. Por exemplo, verifique que

$$e^{1,4-0,6i} = e^{1,4}(\cos 0,6 - i \operatorname{sen} 0,6) = 4,055(0,8253 - 0,5646i) = 3,347 - 2,289i$$

$$|e^{1,4-0,6i}| = e^{1,4} = 4,055, \qquad \operatorname{Arg} e^{1,4-0,6i} = -0,6.$$

Para ilustrar (3), considere o produto de

$$e^{2+i} = e^2(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) \qquad \text{e} \qquad e^{4-i} = e^4(\cos 1 - i \operatorname{sen} 1)$$

e verifique que ele é igual a $e^2e^4(\cos^2 1 + \operatorname{sen}^2 1) = e^6 = e^{(2+i)+(4-i)}$.

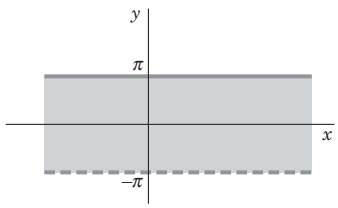


Fig. 333. Região fundamental da função exponencial e^z no plano z

Para resolver a equação $e^z = 3 + 4i$, observe primeiro que $|e^z| = e^x = 5$, $x = \ln 5 = 1,609$ é a parte real de todas as soluções. Agora, uma vez que $e^x = 5$,

$$e^x \cos y = 3, \qquad e^x \operatorname{sen} y = 4, \qquad \cos y = 0,6, \qquad \operatorname{sen} y = 0,8, \qquad y = 0,927.$$

Resp.: $z = 1,609 + 0,927i \pm 2n\pi i$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Isso corresponde a um número infinitamente grande de soluções (devido à periodicidade de e^z), que se situam sobre a linha vertical $x = 1,609$ e a uma distância de 2π de suas vizinhas. ■

Resumindo: há diversas propriedades de $e^z = \exp z$ que têm um paralelo com as e^x; uma exceção é a periodicidade de $2\pi i$ para e^z, o que sugere o conceito de uma região fundamental. É preciso ter em mente que e^z é uma *função inteira*. (Você ainda se lembra do significado disso?)

PROBLEMAS PROPOSTOS 13.5

1. Usando as equações de Cauchy-Riemann, mostre que e^z é inteira.

2–8 **Valores de e^z.** Calcule e^z na forma $u + iv$ e $|e^z|$, onde z é igual a:

2. $3 + \pi i$
3. $1 + 2i$
4. $\sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi i$
5. $7\pi i/2$
6. $(1 + i)\pi$
7. $0{,}8 - 5i$
8. $9\pi i/2$

9–12 **Partes Reais e Imaginárias.** Obtenha Re e Im de:

9. e^{-2z}
10. e^{z^3}
11. e^{z^2}
12. $e^{1/z}$

13–17 **Forma Polar.** Escreva na forma polar:

13. $\sqrt{i}$
14. $1 + i$
15. $\sqrt[n]{z}$
16. $3 + 4i$
17. -9

18–21 **Equações.** Encontre todas as soluções e represente graficamente algumas delas no plano complexo.

18. $e^{3z} = 4$
19. $e^z = -2$
20. $e^z = 0$
21. $e^z = 4 - 3i$

22. PROJETO DE EQUIPE. Propriedades Adicionais da Função Exponencial. (a) Analiticidade. Mostre que e^z é inteira. E o que dizer de $e^{1/z}$? $e^{\bar{z}}$? $e^x(\cos ky + i \operatorname{sen} ky)$? (Use as equações de Cauchy-Riemann.)

(b) Valores especiais. Encontre todos os valores de z tais que (i) e^z é real, (ii) $|e^{-z}| < 1$, (iii) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

(c) Função harmônica. Mostre que

$u = e^{xy} \cos (x^2/2 - y^2/2)$ é harmônica e encontre uma sua conjugada.

(d) Unicidade. É interessante que $f(z) = e^z$ seja unicamente determinada por meio das duas propriedades $f(x + i0) = e^x$ e $f'(z) = f(z)$, onde se supõe que f seja inteira. Prove isso usando as equações de Cauchy-Riemann.

13.6 Funções Trigonométricas e Hiperbólicas

Do mesmo modo que na Seção 13.5 fizemos uma extensão de e^x real para e^z complexo, desejamos agora estender as funções trigonométricas *reais* familiares para as *funções trigonométricas complexas*. Podemos fazer isso por meio das fórmulas de Euler (Seção 13.5)

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x.$$

Por adição e subtração, obtemos para o cosseno e seno *reais*

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Isso sugere as seguintes definições para os valores complexos $z = x + iy$:

(1)
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Entre os números complexos, é bastante notável a associação de funções sem relação entre si nos números reais. E isso não é um incidente isolado, mas algo típico da situação geral, o que mostra a vantagem de se trabalhar com os números complexos.

Além disso, como no cálculo, definimos:

(2)
$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

e

(3)
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Uma vez que e^z é inteira, $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ são funções inteiras, porém $\tan z$ e $\sec z$ não são inteiras; elas são analíticas nos pontos onde $\cos z$ é zero; e cotang z e cossec z são analíticas excetuando-se quando $\operatorname{sen} z$ é zero. As fórmulas para as derivadas decorrem prontamente de $(e^z)' = e^z$ e (1)-(3); como no cálculo,

(4)
$$(\cos z)' = -\operatorname{sen} z, \qquad (\operatorname{sen} z)' = \cos z, \qquad (\tan z)' = \sec^2 z,$$

etc. A Equação (1) também mostra que **a fórmula de Euler *é válida no caso complexo***:

(5) $$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \qquad \text{para todo } z.$$

As partes reais e imaginárias de cos z e sen z são necessárias para se calcularem os valores, e também são úteis para mostrar as propriedades das nossas funções. Ilustremos isso por meio de um exemplo típico.

EXEMPLO 1 Partes Reais e Imaginárias. Valor Absoluto. Periodicidade

Mostre que

(6)
$$\textbf{(a)} \quad \cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$
$$\textbf{(b)} \quad \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

e

(7)
$$\textbf{(a)} \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$
$$\textbf{(b)} \quad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

e forneça algumas aplicações dessas fórmulas.

Solução. De (1),

$$\begin{aligned}\cos z &= \tfrac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \tfrac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \tfrac{1}{2}e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \cos x - \tfrac{1}{2}i(e^{y} - e^{-y}) \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

Isso fornece (6a), visto que, como se sabe do cálculo,

(8) $$\cosh y = \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}), \qquad \operatorname{senh} y = \tfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y});$$

(6b) é obtida de modo similar. De (6a) e de $\cosh^2 y = 1 + \operatorname{senh}^2 y$, obtemos

$$|\cos z|^2 = (\cos^2 x)\,(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y.$$

Uma vez que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, isso fornece (7a) e (7b) é obtida de modo similar.

Por exemplo, $\cos(2 + 3i) = \cos 2 \cosh 3 - i \operatorname{sen} 2 \operatorname{senh} 3 = -4{,}190 - 9{,}109i$.

De (6), vemos que cos z e sen z são **periódicas com período 2π**, do mesmo modo que no caso real. A periodicidade de tan z e cot z com período π segue-se agora.

A fórmula (7) aponta para uma diferença essencial entre os casos real e complexo de cosseno e seno; enquanto $|\cos x| \leqq 1$ e $|\operatorname{sen} x| \leqq 1$, as funções complexas de cosseno e seno ***não são mais limitadas*** e tendem ao infinito em valores absolutos à medida que $y \to \infty$, logo senh $y \to \infty$ em (7). ■

EXEMPLO 2 Soluções de Equações. Pontos de zero de cos *z* e sen *z*

Resolva (a) $\cos z = 5$ (que não tem solução real!), (b) (b) $\cos z = 0$, (c) $\operatorname{sen} z = 0$.

Solução. (a) $e^{2iz} - 10e^{iz} + 1 = 0$ de (1) pela multiplicação por e^{iz}. Esta é uma equação quadrática em e^{iz}, com as soluções (arredondadas para três casas decimais)

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = 5 \pm \sqrt{25 - 1} = 9{,}899 \quad \text{e} \quad 0{,}101.$$

Portanto, $e^{-y} = 9{,}899$ ou $0{,}101$, $e^{ix} = 1$, $y = \pm 2{,}292$, $x = 2n\pi$. *Resp.* $z = \pm 2n\pi \pm 2{,}292i$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$).

Você poderia obter isso de (6a)?

(b) $\cos x = 0$, $\operatorname{senh} y = 0$ por (7a), $y = 0$. *Resp.* $z = \pm \frac{1}{2}(2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$).

(c) $\operatorname{sen} x = 0$, $\operatorname{senh} y = 0$ por (7b). *Resp.* $z = \pm n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$). Logo, os únicos pontos de zero de cos z e sen z são os das funções reais de cosseno e seno. ■

As **fórmulas gerais** *para as funções trigonométricas reais continuam a se verificar para os valores complexos*. Isso decorre imediatamente das definições. Mencionamos em particular as regras da adição

(9)
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$
$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$$

e a fórmula

(10) $$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1.$$

Outras fórmulas úteis estão incluídas em Problemas Propostos.

Funções Hiperbólicas

As formas complexas de **cosseno** e **seno hiperbólicos** são definidas pelas fórmulas

(11) $$\cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad \operatorname{senh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Isso é sugerido pelas definições familiares dos valores reais [veja (8)]. Essas funções são inteiras, com as derivadas

(12) $$(\cosh z)' = \operatorname{senh} z, \qquad (\operatorname{senh} z)' = \cosh z,$$

como no cálculo. As outras funções hiperbólicas são definidas por

(13) $$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z},$$
$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}.$$

Existe uma Relação entre as Funções Complexas Trigonométricas e as Complexas Hiperbólicas. Em (11), se substituirmos z por iz e então usarmos (1), obtemos

(14) $$\cosh iz = \cos z, \qquad \operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z.$$

Similarmente, se em (1) substituirmos z por iz e então usarmos (11), obtemos inversamente

(15) $$\cos iz = \cosh z, \qquad \operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z.$$

Aqui, temos um outro caso de funções reais *não-relacionadas* que possuem funções complexas análogas *relacionadas*, o que mais uma vez salienta a vantagem de se trabalhar no caso complexo com o propósito de se obter um formalismo mais unificado e uma compreensão mais aprofundada das funções especiais. Esta é uma das principais razões da importância da análise complexa em engenharia e física.

PROBLEMAS PROPOSTOS 13.6

1. Prove que cos z, sen z, cosh z, senh z são funções inteiras.

2. Verifique por derivação que Re cos z e Im sen z são harmônicas.

3–6 **FÓRMULAS PARA AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS**

Mostre que

3. $$\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y.$$

4. $$\cosh (z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$$
$$\operatorname{senh} (z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2.$$

5. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

6. $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh 2z$

7–15 **Valores de Funções.** Calcule (na forma $u + iv$)

7. cos $(1 + i)$ **8.** sen $(1 + i)$

9. sen $5i$, cos $5i$ **10.** cos $3\pi i$

11. cosh $(-2 + 3i)$, cos $(-3 - 2i)$

12. $-i$ senh $(-\pi + 2i)$, sen $(2 + \pi i)$

13. cosh $(2n + 1)\pi i$, $n = 1, 2, \cdots$

14. senh $(4 - 3i)$ **15.** cosh $(4 - 6\pi i)$

16. (Partes reais e imaginárias) Mostre que

$$\operatorname{Re} \tan z = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y},$$
$$\operatorname{Im} \tan z = \frac{\operatorname{senh} y \cosh y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}.$$

17–21 **Equações.** Obtenha todas as soluções das seguintes equações.

17. cosh $z = 0$ **18.** sen $z = 100$

19. cos $z = 2i$ **20.** cosh $z = -1$

21. senh $z = 0$

22. Encontre todos os números complexos z para os quais (a) cos z, (b) sen z apresentam valores reais.

23–25 **Equações e Desigualdades.** Usando as definições, prove que:

23. cos z é par, ou seja, cos $(-z)$ = cos z, e que sen z é ímpar, ou seja, sen $(-z)$ = –sen z.

24. $|\operatorname{senh} y| \leqq |\cos z| \leqq \cosh y$, $|\operatorname{senh} y| \leqq |\operatorname{sen} z| \leqq \cosh y$. Conclua que, para o total do plano complexo, o cosseno e o seno complexos não são limitados.

25. $\operatorname{sen} z_1 \cos z_2 = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} (z_1 + z_2) + \operatorname{sen} (z_1 - z_2)]$

13.7 Logaritmo. Potência Geral

Finalmente, apresentaremos agora o *logaritmo complexo*, que é mais complicado que o logaritmo real (sendo este último um caso especial do primeiro) e, historicamente, confundiu os matemáticos durante um certo tempo (dessa forma, se a princípio você ficar confuso — o que não precisa acontecer! — seja paciente e trabalhe esta seção com um cuidado extra).

O **logaritmo natural** de $z = x + iy$ é representado por $\ln z$ (às vezes também por $\log z$), sendo definido como a função inversa da função exponencial; ou seja, para $z \neq 0$, define-se $w = \ln z$ pela relação

$$e^w = z.$$

(Note que $z = 0$ é impossível, visto que $e^w \neq 0$ para todo w; veja a Seção 13.5.) Se fizermos $w = u + iv$ e $z = re^{i\theta}$, isso se torna

$$e^w = e^{u+iv} = re^{i\theta}.$$

Agora, da Seção 13.5, sabemos que e^{u+iv} possui o valor absoluto e^u e o argumento v. Esses valores têm que ser iguais ao valor absoluto e ao argumento no lado direito:

$$e^u = r, \qquad v = \theta.$$

$e^u = r$ dá $u = \ln r$, onde $\ln r$ é o logaritmo natural *real* familiar do número positivo $r = |z|$. Logo, $w = u + iv = \ln z$ é dado por

(1) $$\ln z = \ln r + i\theta \qquad (r = |z| > 0, \quad \theta = \arg z).$$

Agora, vem um ponto importante (que não tem analogia no cálculo real). Uma vez que o argumento de z é determinado somente para múltiplos inteiros de 2π, ***o logaritmo natural complexo* $\ln z$ ($z \neq 0$) *tem um número infinitamente grande de valores***.

O valor do $\ln z$ correspondente ao valor principal $\operatorname{Arg} z$ (veja a Seção 13.2) é denotado por $\operatorname{Ln} z$ (Ln, com L maiúsculo), sendo chamado de **valor principal** de $\ln z$. Portanto,

(2) $$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \qquad (z \neq 0).$$

A unicidade de $\operatorname{Arg} z$ para um dado z ($\neq 0$) implica que $\operatorname{Ln} z$ é univalente, ou seja, é uma função no sentido usual. Uma vez que os demais valores do $\arg z$ diferem por múltiplos inteiros de 2π, os demais valores de $\ln z$ são dados por

(3) $$\ln z = \operatorname{Ln} z \pm 2n\pi i \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Eles têm todos a mesma parte real e suas partes imaginárias diferem por múltiplos inteiros de 2π.

Se z for real positivo, então $\operatorname{Arg} z = 0$, e $\operatorname{Ln} z$ torna-se idêntico ao logaritmo natural real conhecido do cálculo. Se z for real negativo (de modo que o logaritmo natural do cálculo não é definido!), então $\operatorname{Arg} z = \pi$ e

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + \pi i \qquad (z \text{ real negativo}).$$

De (1) e de $e^{\ln r} = r$ para r real positivo, obtemos

(4a) $$e^{\ln z} = z$$

como era de se esperar, porém, uma vez que $\arg (e^z) = y \pm 2n\pi$ é multivalente, temos

(4b) $$\ln (e^z) = z \pm 2n\pi i, \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

EXEMPLO 1 Logaritmo Natural. Valor Principal

$$\ln 1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \cdots \qquad \operatorname{Ln} 1 = 0$$

$$\ln 4 = 1{,}386\,294 \pm 2n\pi i \qquad \operatorname{Ln} 4 = 1{,}386\,294$$

$$\ln (-1) = \pm \pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \cdots \qquad \operatorname{Ln} (-1) = \pi i$$

$$\ln (-4) = 1{,}386\,294 \pm (2n + 1)\pi i \qquad \operatorname{Ln} (-4) = 1{,}386\,294 + \pi i$$

$$\ln i = \pi i/2, -3\pi/2, 5\pi i/2, \cdots \qquad \operatorname{Ln} i = \pi i/2$$

$$\ln 4i = 1{,}386\,294 + \pi i/2 \pm 2n\pi i \qquad \operatorname{Ln} 4i = 1{,}386\,294 + \pi i/2$$

$$\ln(-4i) = 1{,}386\,294 - \pi i/2 \pm 2n\pi i \qquad \operatorname{Ln}(-4i) = 1{,}386\,294 - \pi i/2$$

$$\ln(3 - 4i) = \ln 5 + i \arg(3 - 4i) \qquad \operatorname{Ln}(3 - 4i) = 1{,}609\,438 - 0{,}927\,295i$$

$$= 1{,}609\,438 - 0{,}927\,295i \pm 2n\pi i \qquad \text{(Fig. 334)}$$

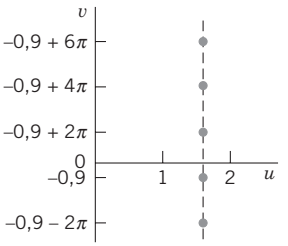


Fig. 334. Alguns valores de ln (3 – 4*i*) do Exemplo 1

As relações familiares do logaritmo natural continuam a se verificar para os valores complexos, ou seja,

(5) (a) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, (b) $\ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$

porém, essas relações têm que ser compreendidas no sentido em que cada valor de um lado está também contido entre os valores do outro lado; veja o próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Ilustração da Relação Funcional (5) no Caso Complexo

Consideremos

$$z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1.$$

Se tomarmos os valores principais

$$\operatorname{Ln} z_1 = \operatorname{Ln} z_2 = \pi i,$$

então, (5a) se verifica, desde que escrevamos $\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = 2\pi i$; entretanto, isso não ocorre para o valor principal, $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} 1 = 0$. ■

TEOREMA 1

Analiticidade do Logaritmo

Para todo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, *a fórmula* (3) *define uma função, que é analítica, excetuando-se em* 0 *e no eixo real negativo, e possui a derivada*

(6) $$(\ln z)' = \frac{1}{z} \qquad (z \text{ não-nulo ou real negativo}).$$

PROVA Mostremos que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. De (1)-(3), temos

$$\ln z = \ln r + i(\theta + c) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\left(\arctan\frac{y}{x} + c\right)$$

onde a constante c é um múltiplo de 2π. Derivando,

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x = -\frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

Logo, as equações de Cauchy-Riemann se verificam. [Confirme isso usando essas equações na forma polar, o que não fizemos, visto que as provamos somente nos problemas (da Seção 13.4).] A fórmula (4) da Seção 13.4 agora fornece (6),

$$(\ln z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$$

■

Cada uma das infinitas funções em (3) é chamada de um **ramo** do logaritmo. O eixo real negativo é conhecido como um **corte do ramo**, sendo usualmente representado graficamente da maneira mostrada na Fig. 335. O ramo para $n = 0$ é chamado de **ramo principal** de $\ln z$.

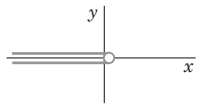


Fig. 335. Corte do ramo para $\ln z$

Potências Gerais

As potências gerais de um número complexo $z = x + iy$ são definidas pela fórmula

(7) $$z^c = e^{c \ln z} \qquad (c \text{ complexo}, z \neq 0).$$

Uma vez que $\ln z$ tem um número infinitamente grande de valores, z^c será, em geral, multivalente. O valor particular

$$z^c = e^{c \operatorname{Ln} z}$$

é chamado de **valor principal** de z^c.

Se $c = n = 1, 2, \cdots$, então z^n é univalente e idêntico à n-ésima potência usual de z. Se $c = -1, -2, \cdots$, a situação é similar.

Se $c = 1/n$, onde $n = 2, 3, ...$, então

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{(1/n) \ln z} \qquad (z \neq 0),$$

o expoente é determinado para múltiplos de $2\pi i/n$, e obtemos os n valores distintos da n-ésima raiz, em concordância com o resultado da Seção 13.2. Se $c = p/q$, o quociente dos dois inteiros positivos, a situação é similar e z^c possui somente um número finito de valores distintos. Entretanto, se c for um número real racional ou genuinamente complexo, então z^c tem um número infinitamente grande de valores.

EXEMPLO 3 Potência Geral

$$i^i = e^{i \ln i} = \exp (i \ln i) = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} i \pm 2n\pi i \right) \right] = e^{-(\pi/2) \mp 2n\pi}.$$

Todos esses valores são reais e o valor principal ($n = 0$) é $e^{-\pi/2}$.

Similarmente, fazendo um cálculo direto e multiplicando no expoente,

$$(1 + i)^{2-i} = \exp \left[(2 - i) \ln (1 + i) \right] = \exp \left[(2 - i) \left\{ \ln \sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\pi i \pm 2n\pi i \right\} \right]$$
$$= 2e^{\pi/4 \pm 2n\pi} \left[\operatorname{sen} \left(\tfrac{1}{2} \ln 2 \right) + i \cos \left(\tfrac{1}{2} \ln 2 \right) \right]. \qquad \blacksquare$$

É uma ***convenção*** que, para valores reais positivos $z = x$, a expressão z^c significa que $e^{c \ln x}$, onde $\ln x$ é o logaritmo natural real elementar (ou seja, o valor principal $\operatorname{Ln} z$ ($z = x > 0$) no sentido de nossa definição). Além disso, se $z = e$, a base dos logaritmos naturais, $z^c = e^c$ é *convencionalmente* considerado o valor único obtido de (1) da Seção 13.5.

De (7), vemos que, para qualquer número complexo a,

(8) $$a^z = e^{z \ln a}.$$

Introduzimos agora as funções complexas necessárias nos trabalhos práticos, algumas delas (e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\cosh z$, $\operatorname{senh} z$) inteiras (Seção 13.5), algumas ($\tan z$, $\cot z$, $\tanh z$, $\coth z$) analíticas excetuando-se em certos pontos, e uma delas ($\ln z$) dividindo-se num número infinitamente grande de funções, cada uma delas sendo analítica excetuando-se em 0 no eixo real positivo.

Para as **funções trigonométricas inversa** e **hiperbólica**, veja em Problemas Propostos.

PROBLEMAS PROPOSTOS 13.7

1–9 **Valor Principal Ln *z*.** Calcule Ln z quando z é igual a:

1. -10
2. $2 + 2i$
3. $2 - 2i$
4. $-5 \pm 0{,}1i$
5. $-3 - 4i$
6. -100
7. $0{,}6 + 0{,}8i$
8. $-ei$
9. $1 - i$

10–16 **Todos os Valores de ln *z*.** Encontre todos os valores e represente graficamente alguns deles no plano complexo.

10. $\ln 1$
11. $\ln(-1)$
12. $\ln e$
13. $\ln(-6)$
14. $\ln(4 + 3i)$
15. $\ln(-e^{-i})$
16. $\ln(e^{3i})$

17. Mostre que o conjunto de valores de $\ln(i^2)$ difere do conjunto de valores de $2 \ln i$.

18–21 **Equações.** Resolva para z:

18. $\ln z = (2 - \frac{1}{2}i)\pi$
19. $\ln z = 0{,}3 + 0{,}7i$
20. $\ln z = e - \pi i$
21. $\ln z = 2 + \frac{1}{4}\pi i$

22–28 **Potências Gerais.** Mostrando os detalhes do que fizer, encontre o valor principal de:

22. i^{2i}, $(2i)^i$
23. 4^{3+i}
24. $(1 - i)^{1+i}$
25. $(1 + i)^{1-i}$
26. $(-1)^{1-2i}$
27. $i^{1/2}$
28. $(3 - 4i)^{1/3}$

29. De que modo é possível encontrar a resposta do Problema 24 a partir da resposta do Problema 25?

30. PROJETO DE EQUIPE. Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas. Por definição, o **seno inverso** $w = \operatorname{arcsen} z$ é a relação tal que $\operatorname{sen} z = w$. O **cosseno inverso** $w = \arccos z$ é a relação tal que $\cos z = w$. A **tangente inversa**, a **cotangente inversa**, o **seno hiperbólico inverso** etc. são definidos e representados de modo similar. (Note que todas essas relações são ***multivalentes***.) Usando $\operatorname{sen} w = (e^{iw} - e^{-iw})/(2i)$ e representações similares de $\cos w$ etc., mostre que

(a) $\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

(b) $\operatorname{arcsen} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

(c) $\operatorname{arccosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

(d) $\operatorname{arcsenh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$

(e) $\arctan z = \dfrac{i}{2} \ln \dfrac{i + z}{i - z}$

(f) $\operatorname{arctanh} z = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + z}{1 - z}$

(g) Mostre que $w = \operatorname{arcsen} z$ tem um número infinitamente grande de valores e, se w_1 for um desses valores, os demais são da forma $w_1 \pm 2n\pi$ e $\pi - w_1 \pm 2n\pi$, $n = 0, 1, \cdots$. (O *valor principal* de $w = u + iv = \operatorname{arcsen} z$ é definido de modo a ser o valor para o qual $-\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2$ se $v \geqq 0$ e $-\pi/2 < u < \pi/2$ se $v < 0$.)

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 13

1. Faça a soma, subtração, multiplicação e divisão para $26 - 7i$ e $3 + 4i$, bem como para seus complexos conjugados.

2. Escreva na forma polar os dois números dados no Problema 1. Encontre o valor principal de seus argumentos.

3. O que é a desigualdade do triângulo? Qual o seu significado geométrico? E sua importância?

4. Se você conhece os valores de $\sqrt[6]{1}$, como é possível a partir deles obter os valores de $\sqrt[6]{z}$ para um z qualquer?

5. Enuncie de memória a definição de derivada. Ela parece similar à do cálculo. Porém, qual é a grande diferença?

6. O que é uma função analítica? Como você testaria uma função para saber se ela é analítica?

7. Pode uma função ser derivável em um ponto sem ser analítica nele? Em caso afirmativo, dê um exemplo.

8. $|z|$, $\bar{z}$, Re z, Im z são analíticas? Justifique.

9. Enuncie as definições de e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\cosh z$, $\operatorname{senh} z$ e as relações entre essas funções. Essas relações têm analogias no caso real?

10. Quais propriedades de e^z são similares às de e^x? E qual é diferente?

11. O que é a região fundamental de e^z? Qual a sua importância?

12. O que é uma função inteira? Dê exemplos.

13. Por que o ln z é muito mais complicado do que o ln x? Explique de memória.

14. O que é o valor principal de ln z?

15. De que modo a potência geral z^c é definida? Dê exemplos.

16–21 **Números Complexos.** Obtenha na forma $x + iy$, mostrando os detalhes do que fizer:

16. $(1 + i)^{12}$
17. $(-2 + 6i)^2$
18. $1/(3 - 7i)$
19. $(1 - i)/(1 + i)^2$
20. $\sqrt{-5 - 12i}$
21. $(43 - 19i)/(8 + i)$

22–26 **Forma Polar.** Represente na forma polar, com o argumento principal:

22. $1 - 3i$
23. $-6 + 6i$
24. $\sqrt{20}/(4 + 2i)$
25. $-12i$
26. $2 + 2i$

27–30 **Raízes.** Obtenha e represente graficamente todos os valores de

27. $\sqrt{8i}$
28. $\sqrt[4]{256}$
29. $\sqrt[4]{-1}$
30. $\sqrt{32 - 24i}$

31–35 **Funções Analíticas.** Encontre $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ com u ou v conforme dados. Verifique se as funções são analíticas.

31. $u = x/(x^2 + y^2)$
32. $v = e^{-3x} \operatorname{sen} 3y$
33. $u = x^2 - 2xy - y^2$
34. $u = \cos 2x \cosh 2y$
35. $v = e^{x^2 - y^2} \operatorname{sen} 2xy$

36–39 **Funções Harmônicas.** As seguintes funções são harmônicas? Em caso afirmativo, encontre um conjugado harmônico.

36. x^2y^2
37. xy
38. $e^{-x/2} \cos \frac{1}{2}y$
39. $x^2 + y^2$

40–45 **Valores de Funções Especiais.** Encontre os valores de

40. $\operatorname{sen}(3 + 4\pi i)$
41. $\operatorname{senh} 4\pi i$
42. $\cos(5\pi + 2i)$
43. Ln $(0{,}8 + 0{,}6i)$
44. $\tan(1 + i)$
45. $\cosh(1 + \pi i)$

RESUMO DO CAPÍTULO 13
Números e Funções Complexas

Para as operações aritméticas com **números complexos**

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \tag{1}$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ e para sua representação no plano complexo, veja as Seções 13.1 e 13.2.

Uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é **analítica** num domínio D se possuir uma **derivada** (Seção 13.3)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2}$$

em todo lugar em D. Além disso, $f(z)$ é *analítica* num ponto $z = z_0$ se possuir uma derivada numa vizinhança de z_0 (e não simplesmente no próprio z_0).

Se $f(z)$ for analítica em D, então $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem às **equações** (muito importantes!) **de Cauchy-Riemann** (Seção 13.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

em todos os lugares de D. Dessa forma, u e v também satisfazem à **equação de Laplace**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{4}$$

em todos os lugares de D. Se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ forem contínuas e tiverem derivadas parciais *contínuas* em D que satisfazem (3) em D, então $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D. Veja a Seção 13.4. (Mais informações sobre a equação de Laplace e a análise complexa são fornecidas no Capítulo 18.)

A **função exponencial** complexa (Seção 13.5)

$$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{5}$$

se reduz a e^x se $z = x$ ($y = 0$). Ela é periódica e tem o período $2\pi i$ e a derivada e^z.

As **funções trigonométricas** são (Seção 13.6)

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \\ \operatorname{sen} z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \end{aligned} \tag{6}$$

e, além disso,

$$\tan z = (\operatorname{sen} z)/\cos z, \qquad \cot z = 1/\tan z, \quad \text{etc.}$$

As **funções hiperbólicas** são (Seção 13.6)

$$\cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cos iz, \qquad \operatorname{senh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = -i \operatorname{sen} iz \tag{7}$$

etc. As funções (5)-(7) são **inteiras**, ou seja, analíticas em todos os lugares do plano complexo.

O **logaritmo natural** é (Seção 13.7)

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \pm 2n\pi i \tag{8}$$

onde $z \neq 0$ e $n = 0, 1, \cdots$. Arg z é o **valor principal** do arg z, ou seja, $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqq \pi$. Vemos que ln z tem um número infinitamente grande de valores. Fazendo $n = 0$, temos o **valor principal** Ln z de ln z; portanto, $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$.

As **potências gerais** são definidas por (Seção 13.7)

$$z^c = e^{c \ln z} \qquad (c \text{ complexo}, z \neq 0). \tag{9}$$

CAPÍTULO **14**

Integração Complexa

A importância da integração no plano complexo reside em duas razões principais. A razão prática é que a integração complexa pode ser usada para avaliar certas integrais reais que surgem nas aplicações e que são inacessíveis pelo cálculo integral real. A razão teórica é que algumas propriedades básicas das funções analíticas são difíceis de provar por outros métodos. Uma notável propriedade desse tipo é a existência das derivadas de ordem superior de uma função analítica.

A integração complexa também desempenha um papel importante em conexão com as funções especiais, como a função gama (veja [RG1]), a função erro, vários polinômios (veja [RG10]) e outras, além da aplicação dessas funções na física.

Neste capítulo, definiremos e explicaremos as integrais complexas. O resultado mais importante do capítulo é o **teorema integral de Cauchy** ou *teorema de Cauchy–Goursat*, como também é chamado (Seção 14.2). Ele implica a **fórmula integral de Cauchy** (Seção 14.3), que, por sua vez, implica a existência de todas as derivadas de ordem superior de uma função analítica. Logo, neste aspecto, as funções analíticas complexas comportam-se com muito mais simplicidade do que as funções de valores reais de variáveis reais, que podem ter derivadas apenas até uma certa ordem.

Um método adicional de integração complexa, conhecido como integração por resíduos, e sua aplicação às integrais reais precisará de séries complexas e será apresentado no Capítulo 16.

Pré-requisito: Capítulo 13
Referências e respostas dos problemas: Parte D do Apêndice 1 e Apêndice 2.

14.1 Integral de Linha no Plano Complexo

Como no cálculo, faz-se aqui uma distinção entre integrais definidas e integrais indefinidas, ou antiderivadas. Uma **integral indefinida** é uma função cuja derivada é igual a uma dada função analítica numa região. Invertendo as fórmulas conhecidas de derivação, podemos encontrar diversos tipos de integrais indefinidas.

As integrais definidas *complexas* são chamadas de **integrais de linha** (complexas), sendo escritas como

$$\int_C f(z)\,dz.$$

Aqui, para o **integrando** $f(z)$, faz-se a integração ao longo de uma dada curva C ou de uma porção dela (um *arco*, embora diremos uma **"*curva*"** em qualquer caso, por simplicidade). Essa curva C no plano complexo é chamada de **caminho de integração**. Podemos representar C parametricamente como

(1) $$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

O sentido de t crescente é chamado de **sentido positivo** em C, e dizemos que C é **orientada** por (1).

Por exemplo, $z(t) = t + 3it$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ corresponde a uma porção (um segmento) da linha $y = 3x$. A função $z(t) = 4\cos t + 4i \operatorname{sen} t$ $(-\pi \leqq t \leqq \pi)$ representa o círculo $|z| = 4$, e assim por diante. Daremos outros exemplos depois.

Supomos que C seja uma **curva suave**, ou seja, C possui uma derivada contínua e não-nula

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$$

em cada ponto. Geometricamente, isso significa que C tem em todos os lugares uma tangente variando continuamente, como se segue diretamente da definição

$$\dot{z}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \qquad \text{(Fig. 336).}$$

Aqui, usamos um ponto, uma vez que a aspa simples $'$ representa a derivada em relação a z.

Definição da Integral de Linha Complexa

Esta definição é similar à do método adotado no cálculo. Consideremos que C seja uma curva suave no plano complexo, sendo dada por (1), e que $f(z)$ seja uma função contínua dada (pelo menos) em cada ponto de C. Agora, em (1), subdividimos o intervalo $a \leqq t \leqq b$ (ou seja, fazemos nele ***"partições"***) através dos pontos

$$t_0 \,(= a), \quad t_1, \quad \cdots, \quad t_{n-1}, \quad t_n \,(= b)$$

onde $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. A essa subdivisão corresponde uma subdivisão de C pelos pontos

$$z_0, \quad z_1, \quad \cdots, \quad z_{n-1}, \quad z_n \,(= Z) \qquad \text{(Fig. 337),}$$

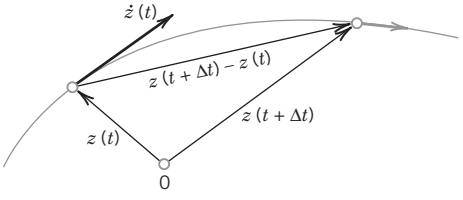


Fig. 336. Vetor tangente $\dot{z}(t)$ de uma curva C no plano complexo dada por $z(t)$. A seta sobre a curva indica o *sentido positivo* (sentido de t crescente)

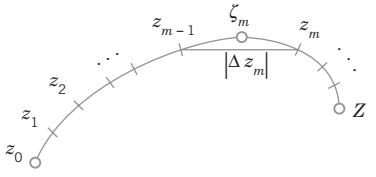


Fig. 337. Integral de linha complexa

onde $z_j = z(t_j)$. Em cada porção da subdivisão de C, escolhemos um ponto arbitrário, digamos, um ponto ζ_1 situado entre z_0 e z_1 (ou seja, $\zeta_1 = z(t)$, onde t satisfaz a $t_0 \leqq t \leqq t_1$), um ponto ζ_2 entre z_1 e z_2 etc. Então, formamos a soma

$$(2) \qquad S_n = \sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)\, \Delta z_m \qquad \text{onde} \qquad \Delta z_m = z_m - z_{m-1}.$$

Fazemos isso para cada $n = 2, 3, \cdots$ de uma maneira completamente independente, porém de tal modo que o maior valor de $|\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}|$ se aproxima de zero à medida que $n \to \infty$. Isso implica que o maior $|\Delta z_m|$ também se aproxima de zero. Com efeito, ele não pode exceder o comprimento do arco de C indo de z_{m-1} a z_m, sendo que o último valor vai a zero, uma vez que o comprimento de arco de uma curva suave é uma função contínua de t. O limite da seqüência de números complexos S_2, S_3, $\cdots$ assim obtido é chamado de **integral de linha** (ou simplesmente *integral*) de $f(z)$ ao longo do caminho de integração C, com a orientação dada por (1). Essa integral de linha é denotada por

$$\textbf{(3)} \qquad \int_C f(z)\, dz, \qquad \text{ou por} \qquad \oint_C f(z)\, dz$$

se C for um **caminho fechado** (um caminho cujo ponto terminal Z coincide com seu ponto inicial z_0, como no caso de um círculo ou de uma curva em forma de 8).

Suposição Geral. *Para as integrais de linha complexas, supõe-se que todos os caminhos de integração sejam* **suaves por intervalo**, *ou seja, que eles consistam em um número finito de curvas suaves unidas por seus pontos extremos.*

Propriedades Básicas Resultantes Diretamente da Definição

1. **Linearidade.** A integração é uma **operação linear**, ou seja, pode-se integrar as somas termo a termo, sendo também possível extrair fatores constantes de dentro do sinal da integral. Isso significa que, se as integrais de f_1 e f_2 ao longo de um caminho C existirem, o mesmo acontece para a integral de $k_1 f_1 + k_2 f_2$ ao longo do mesmo caminho e

(4) $$\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)]\, dz = k_1 \int_C f_1(z)\, dz + k_2 \int_C f_2(z)\, dz.$$

2. Integrar no **sentido inverso** ao longo de um ***mesmo*** caminho, de z_0 para Z (lado esquerdo da próxima equação), e integrar de Z para z_0 (lado direito), faz surgir um sinal negativo como o mostrado a seguir,

(5) $$\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)\, dz.$$

3. Partição do caminho (veja a Fig. 338)

(6) $$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

Fig. 338. Partição do caminho [fórmula (6)]

Existência da Integral de Linha Complexa

Nossas suposições de que $f(z)$ seja contínua e de que C seja suave por intervalo implicam a existência da integral de linha (3). Pode-se ver isso do seguinte modo.

Como no capítulo anterior, escrevemos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Também consideramos

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m \qquad \text{e} \qquad \Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m.$$

Então, podemos escrever (2) como

(7) $$S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m)$$

onde $u = u(\zeta_m, \eta_m)$, $v = v(\zeta_m, \eta_m)$ e somamos em m de 1 a n. Fazendo a multiplicação, podemos agora dividir S_n em quatro somas:

$$S_n = \sum u\, \Delta x_m - \sum v\, \Delta y_m + i \left[\sum u\, \Delta y_m + \sum v\, \Delta x_m \right].$$

Os resultados dessas somas são valores reais. Uma vez que f é contínua, u e v são contínuas. Logo, se fizermos n aproximar-se do infinito da maneira que acabamos de mencionar, então os maiores valores de Δx_m e de Δy_m irão se aproximar de zero, e cada soma no lado direito torna-se uma integral de linha real:

(8) $$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_C f(z)\, dz = \int_C u\, dx - \int_C v\, dy + i \left[\int_C u\, dy + \int_C v\, dx \right].$$

Isso mostra que, considerando as suposições que fizemos para f e C, a integral de linha (3) existe e seu valor é independente da escolha das subdivisões e dos pontos intermediários ζ_m. ■

Primeiro Método de Avaliação: Integração Indefinida e Substituição dos Limites

Este método é o análogo da avaliação das integrais definidas que se faz no cálculo, sendo expresso pela bem conhecida fórmula

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)].$$

Ele é mais simples que o método apresentado depois, porém é adequado apenas para as funções analíticas. Para formulá-lo, necessitamos do seguinte conceito de interesse geral.

Dizemos que um domínio D é **simplesmente conectado** se cada **curva fechada simples** (curva fechada sem auto-interseções) encerra somente pontos de D.

Por exemplo, um disco circular é simplesmente conectado, ao passo que um anel (Seção 13.3) não o é. (Explique!)

TEOREMA 1 **Integração Indefinida de Funções Analíticas**

Consideremos que $f(z)$ seja analítica num domínio simplesmente conectado D. Então, existe uma integral indefinida de $f(z)$ no domínio D, ou seja, uma função analítica $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ em D e, para todos os caminhos em D associando dois pontos z_0 e z_1 em D, temos

$$\textbf{(9)} \qquad \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) \qquad [F'(z) = f(z)].$$

(*Note que podemos escrever z_0 e z_1 ao invés de C, uma vez que obtemos o mesmo valor para todos esses caminhos C entre z_0 e z_1.*)

Este teorema será provado na próxima seção.

A conectividade simples desempenha um papel bastante essencial no Teorema 1, conforme veremos no Exemplo 5.

Uma vez que as funções analíticas constituem nosso principal interesse, e como as fórmulas de derivação são freqüentemente úteis na obtenção de $F(z)$ para uma dada função $f(z) = F'(z)$, o presente método é de grande interesse prático.

Se $f(z)$ for inteira (Seção 13.5), podemos considerar para D o plano complexo (que, por certo, é simplesmente conectado).

EXEMPLO 1 $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2\,dz = \frac{1}{3}\,z^3\Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}\,(1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,i$ ■

EXEMPLO 2 $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\,dz = \operatorname{sen} z\Big|_{-\pi i}^{\pi i} = 2\operatorname{sen}\pi i = 2i\operatorname{senh}\pi = 23{,}097i$ ■

EXEMPLO 3 $\displaystyle\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{z/2}\,dz = 2e^{z/2}\Big|_{8+\pi i}^{8-3\pi i} = 2(e^{4-3\pi i/2} - e^{4+\pi i/2}) = 0$

uma vez que e^z é periódica, com o período $2\pi i$. ■

EXEMPLO 4 $\displaystyle\int_{-i}^{i} \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} i - \operatorname{Ln}(-i) = \frac{i\pi}{2} - \left(-\frac{i\pi}{2}\right) = i\pi$. Aqui, D é o plano complexo sem o ponto 0 e sem o eixo real negativo (onde Ln z não é analítica). Obviamente, D é um domínio simplesmente conectado. ■

Segundo Método de Avaliação: Usando a Representação de um Caminho

Este método não se restringe às funções analíticas, mas se aplica a qualquer função complexa contínua.

TEOREMA 2 **Integração Feita Usando-se o Caminho**

Consideremos C um caminho suave por intervalos, representado por $z = z(t)$, onde $a \leqq t \leqq b$. Consideremos também que $f(z)$ seja uma função continua em C. Então,

$$\textbf{(10)} \qquad \int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)\,dt \qquad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt}\right).$$

PROVA O lado esquerdo de (10) é dado por (8) em termos das integrais de linha reais, e mostremos agora que o lado direito de (10) é igual a (8). Temos $z = x + iy$, logo, $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$. Escrevemos simplesmente u para $u[x(t), y(t)]$ e v para $v[x(t), y(t)]$. Temos também $dx = \dot{x}\,dt$ e $dy = \dot{y}\,dt$. Conseqüentemente, em (10),

$$\begin{aligned}\int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)\,dt &= \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y})\,dt \\ &= \int_C [u\,dx - v\,dy + i(u\,dy + v\,dx)] \\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx).\end{aligned}$$

■

COMENTÁRIO. Nas Equações (7) e (8) usadas para provar a existência da integral de linha complexa, fizemos uma referência às integrais de linha reais. Se quisermos evitar isso, podemos considerar (10) como uma *definição* de integral de linha complexa.

Etapas da Aplicação do Teorema 2

(A) Representar o caminho C na forma $z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$
(B) Calcular a derivada $\dot{z}(t) = dz/dt$
(C) Em $f(z)$, substituir z por $z(t)$ (logo, também substituir x por $x(t)$ e y por $y(t)$).
(D) Integrar $f[z(t)]\dot{z}(t)$ em t, de a até b.

EXEMPLO 5 Um Resultado Básico: a Integral de $1/z$ ao Redor do Círculo Unitário

Mostremos que, se integrarmos $1/z$ no sentido anti-horário ao redor do círculo unitário (círculo de raio 1 e centro 0; veja a Seção 13.3), obtemos

(11)
$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$
(com C sendo o círculo unitário, no sentido anti-horário).

Este resultado é muito importante e necessitaremos dele com bastante freqüência.

Solução. **(A)** Podemos representar o círculo unitário C na Fig. 327 da Seção 13.3 por

$$z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi),$$

de modo que a integração anti-horária corresponde a um acréscimo de 0 a 2π em t.
(B) A derivação fornece $\dot{z}(t) = ie^{it}$ (regra da cadeia!)
(C) Fazendo a substituição, $f(z(t)) = 1/z(t) = e^{-it}$.
(D) Portanto, obtemos de (10) o resultado

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Verifique esse resultado utilizando $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.

A conectividade simples é essencial no Teorema 1. A Equação (9) do Teorema 1 dá um resultado nulo para qualquer caminho fechado, visto que, nesse caso, $z_1 = z_0$, de modo que $F(z_1) - F(z_0) = 0$.. Agora, $1/z$ não é analítica em $z = 0$. Entretanto, qualquer domínio *simplesmente conectado* que contenha o círculo unitário necessariamente encerra $z = 0$, de modo que o Teorema 1 não se aplica — não é suficiente o fato de $1/z$ ser analítica num anel, digamos, $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$, visto que o anel não é simplesmente conectado! ■

EXEMPLO 6 Integral de $1/z^m$ com um Expoente Inteiro m

Consideremos $f(z) = (z - z_0)^m$ onde m é um inteiro e z_0 uma constante. Faça a integração anti-horária ao redor do círculo C de raio ρ e centro em z_0 (Fig. 339).

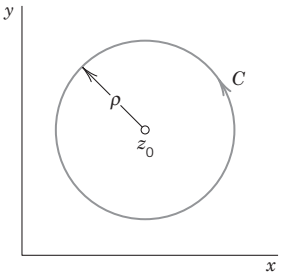


Fig. 339. Caminho do Exemplo 6

Solução. Podemos representar C na forma

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \operatorname{sen} t) = z_0 + \rho e^{it} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi).$$

Então, temos,

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \qquad dz = i\rho e^{it}\, dt$$

e obtemos

$$\oint_C (z - z_0)^m\, dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt}\, i\rho e^{it}\, dt = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\, dt.$$

Pela fórmula de Euler (5) da Seção 13.6, o lado direito é igual a

$$i\rho^{m+1}\left[\int_0^{2\pi}\cos\,(m+1)t\,dt + i\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\,(m+1)t\,dt\right].$$

Se $m = -1$, temos $\rho^{m+1} = 1$, cos 0 = 1, sen 0 = 0. Portanto, obtemos $2\pi i$. Para um número inteiro $m \neq 1$, cada uma das duas integrais é nula, devido ao fato de que estamos integrando num intervalo de comprimento 2π, que é igual a um período do seno e do cosseno. Logo, o resultado é

(12)
$$\oint_C (z - z_0)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1), \\ 0 & (m \neq -1 \text{ e inteiro}). \end{cases}$$

■

Dependência do caminho. Agora, vem um fato importante. Se integrarmos uma dada função $f(z)$ de um ponto z_0 até um ponto z_1 ao longo de caminhos diferentes, em geral as integrais terão valores diferentes. Em outras palavras, ***uma integral de linha complexa depende não somente dos pontos extremos do caminho, mas em geral depende também do próprio caminho***. O próximo exemplo nos dá uma primeira impressão disso, e apresentaremos uma discussão sistemática desse aspecto na seção seguinte.

EXEMPLO 7 Integral de uma Função Não-analítica. Dependência do Caminho

Integre $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ de 0 até $1 + 2i$ (a) ao longo de C^* da Fig. 340, (b) ao longo de C abrangendo C_1 e C_2.

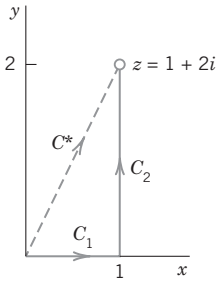


Fig. 340. Caminhos do Exemplo 7

Solução. **(a)** Podemos representar C^* por $z(t) = t + 2it$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. Logo, $\dot{z}(t) = 1 + 2i$ e $f[z(t)] = x(t) = t$ em C^*. Agora, calculamos

$$\int_{C^*} \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^1 t(1 + 2i)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 + 2i) = \tfrac{1}{2} + i.$$

(b) Temos agora,

$$C_1\colon z(t) = t, \qquad \dot{z}(t) = 1, \qquad f(z(t)) = x(t) = t \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$
$$C_2\colon z(t) = 1 + it, \qquad \dot{z}(t) = i, \qquad f(z(t)) = x(t) = 1 \qquad (0 \leqq t \leqq 2).$$

Usando (6), calculamos

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z\,dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^1 t\,dt + \int_0^2 1 \cdot i\,dt = \tfrac{1}{2} + 2i.$$

Note que esse resultado difere do de (a). ■

Contornos para Integrais. A Desigualdade *ML*

Freqüentemente será preciso estimar o valor absoluto de integrais de linha complexas. A fórmula básica para isso é

(13)
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq ML \qquad \textbf{(desigualdade } \boldsymbol{ML}\textbf{);}$$

onde L é o comprimento de C e M é uma constante tal que $|f(z)| \leqq M$ em todos os lugares de C.

PROVA Considerando o valor absoluto em (2) e aplicando a desigualdade generalizada (6*) apresentada na Seção 13.2, obtemos

$$|S_n| = \left|\sum_{m=1}^n f(\zeta_m)\,\Delta z_m\right| \leqq \sum_{m=1}^n |f(\zeta_m)|\,|\Delta z_m| \leqq M\sum_{m=1}^n |\Delta z_m|.$$

Agora, $|\Delta z_m|$ é o comprimento da corda cujas extremidades são z_{m-1} e z_m (veja a Fig. 337). Logo, a soma no lado direito representa o comprimento L^* da linha quebrada de cordas cujas extremidades são $z_0, z_1, \cdots, z_n$ (= Z). Se n se aproximar do infinito de tal modo que o maior valor de $|\Delta t_m|$ e, portanto, de $|\Delta z_m|$, se aproximar de zero, então L^* aproxima-se do comprimento L da curva C, pela definição de comprimento de uma curva. Disso, segue-se a desigualdade (13). ■

Não é possível ver a partir de (13) quão próximo da fronteira ML fica o valor absoluto realmente obtido para a integral, mas isso não representa qualquer problema para se aplicar (13). Por enquanto, explicaremos a utilização prática de (13) através de um exemplo simples.

EXEMPLO 8 Estimativa de uma Integral

Encontre um limite superior para o valor absoluto da integral

$$\int_C z^2\,dz, \qquad C \text{ sendo o segmento retilíneo de 0 a } 1+i, \text{ na Fig. 341.}$$

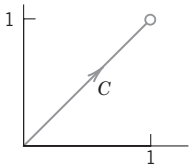


Fig. 341. Caminho do Exemplo 8

Solução. Em C, $L = \sqrt{2}$ e $|f(z)| = |z^2| \leqq 2$ fornece, por (13),

$$\left|\int_C z^2\,dz\right| \leqq 2\sqrt{2} = 2{,}8284.$$

O valor absoluto da integral é $\left|-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\,i\right| = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}9428$ (veja o Exemplo 1). ■

Resumo da Integração. As integrais de linha de $f(z)$ podem ser sempre avaliadas por (10), usando-se uma representação (1) do caminho da integração. Se $f(z)$ for analítica, a integração indefinida feita por (9) como no cálculo será um método mais simples.

PROBLEMAS PROPOSTOS 14.1

1–9 REPRESENTAÇÕES PARAMÉTRICAS

Obtenha e esboce o caminho, juntamente com sua orientação, dado por:

1. $z(t) = (1+3i)t$ $(1 \leqq t \leqq 4)$
2. $z(t) = 5 - 2it$ $(-3 \leqq t \leqq 3)$
3. $z(t) = 4 + i + 3e^{it}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$
4. $z(t) = 1 + i + e^{-\pi it}$ $(0 \leqq t \leqq 2)$
5. $z(t) = e^{it}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$
6. $z(t) = 3 + 4i + 5e^{it}$ $(\pi \leqq t \leqq 2\pi)$
7. $z(t) = 6\cos 2t + 5i \operatorname{sen} 2t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$
8. $z(t) = 1 + 2t + 8it^2$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$
9. $z(t) = t + \frac{1}{2}it^3$ $(-1 \leqq t \leqq 2)$

10–18 REPRESENTAÇÕES PARAMÉTRICAS

Esboce e represente parametricamente o/a:

10. Segmento de $1 + i$ a $4 - 2i$
11. Círculo unitário (anti-horário)
12. Segmento de $a + ib$ a $c + id$
13. Hipérbole $xy = 1$ de $1 + i$ a $4 + \frac{1}{4}i$
14. Semi-elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $y \geqq 0$
15. Parábola $y = 4 - 4x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$
16. $|z - 2 + 3i| = 4$ (sentido anti-horário)
17. $|z + a + ib| = r$ (sentido horário)
18. Elipse $4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$

19–29 INTEGRAÇÃO

Integre pelo primeiro método ou diga por que o método não se aplica, utilizando então o segundo método. (Mostre os detalhes do que fizer.)

19. $\int_C \operatorname{Re} z\,dz$ com C sendo o menor caminho entre 0 e $1 + i$
20. $\int_C \operatorname{Re} z\,dz$ com C sendo a parábola $y = x^2$ de 0 a $1 + i$
21. $\int_C e^{2z}\,dz$ com C sendo o menor caminho entre πi e $2\pi i$
22. $\int_C \operatorname{sen} z\,dz$ com C sendo qualquer caminho entre 0 e $2i$
23. $\int_C \cos^2 z\,dz$ a partir de $-\pi i$ e ao longo de $|z| = \pi$ até πi no meio-plano direito
24. $\int_C (z + z^{-1})\,dz$ com C sendo o círculo unitário (sentido anti-horário)
25. $\int_C \cosh 4z\,dz$ com C sendo qualquer caminho de $-\pi i/8$ a $\pi i/8$
26. $\int_C \bar{z}\,dz$ com C indo de $-1 + i$ até $1 + i$ ao longo da parábola $y = x^2$
27. $\int_C \sec^2 z\,dz$ com C sendo qualquer caminho de $\pi/4$ a $\pi i/4$
28. $\int_C \operatorname{Im} z^2\,dz$ no sentido anti-horário ao longo do triângulo de vértices $z = 0, 1, i$
29. $\int_C ze^{z^2/2}\,dz$ com C indo de i até 1 ao longo dos eixos
30. (Inversão de sentido) Verifique (5) para $f(z) = z^2$, onde C é o segmento de $-1 - i$ a $1 + i$.
31. (Partição do caminho) Verifique (6) para $f(z) = 1/z$, com C_1 e C_2 correspondendo às metades superior e inferior do círculo unitário.

32. (Desigualdade *ML*) Encontre um limite superior para o valor absoluto da integral do Problema 19.

33. (Linearidade) Ilustre (4) com um exemplo de sua escolha. Prove (4).

34. PROJETO DE EQUIPE. Integração. (a) Comparação. Escreva um curto relatório comparando os pontos essenciais dos dois métodos de integração.

(b) Comparação. Avalie $\int_C f(z)\,dz$ pelo Teorema 1 e verifique o resultado pelo Teorema 2, onde:

(i) $f(z) = z^4$ e C é o semicírculo $|z| = 2$ de $-2i$ a $2i$ no meio-plano direito.

(ii) $f(z) = e^{2z}$ e C é o caminho mais curto entre 0 e $1 + 2i$.

(c) Deformação contínua do caminho. Faça experiências com uma família de caminhos com pontos extremos em comum, digamos, $z(t) = t + ia$ sen t, $0 \leqq t \leqq \pi$, sendo a um parâmetro real. Integre as funções não-analíticas (Re z, Re (z^2) etc.) e discuta como o resultado depende de a. Então, considere algumas funções analíticas de sua própria escolha. (Mostre os detalhes do que fizer.) Faça comparações e comentários.

(d) Deformação contínua do caminho. Escolha uma outra família, por exemplo, as semi-elipses $z(t) = a \cos t + i \text{ sen } t$, $-\pi/2 \leqq t \leqq \pi/2$ e faça experimentos como em (c).

35. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Integração. Escreva programas para os dois métodos de integração considerados. Aplique-os a problemas de sua própria escolha. Você conseguiria juntá-los num único programa, que também seja capaz de decidir qual dos dois métodos deve ser empregado num caso específico?

14.2 Teorema Integral de Cauchy

Acabamos de ver na Seção 14.1 que uma integral de linha de uma função $f(z)$ geralmente depende não apenas dos pontos extremos do caminho, mas também da escolha do próprio caminho. Freqüentemente, essa dependência torna as situações mais complicadas. Logo, as condições sob as quais isso ***não*** ocorre são de considerável importância. A saber, se $f(z)$ for analítica num domínio D e se D for simplesmente conectado (veja a Seção 14.1 e também o assunto apresentado a seguir), então a integral não dependerá da escolha de um caminho entre dois pontos dados. Este resultado (Teorema 2) decorre do ***teorema integral de Cauchy***, juntamente com outras conseqüências básicas que tornam ***este teorema o mais importante deste capítulo***, além de assumir uma importância fundamental em toda a análise complexa.

Comecemos repetindo e ilustrando a definição de conectividade simples (Seção 14.1) e acrescentando alguns outros detalhes.

1. Um **caminho fechado simples** é um caminho fechado (Seção 14.1) que não possui interseções ou toca a si próprio (Fig. 342). Por exemplo, um círculo é um caminho simples, porém uma curva em forma de 8 não o é.

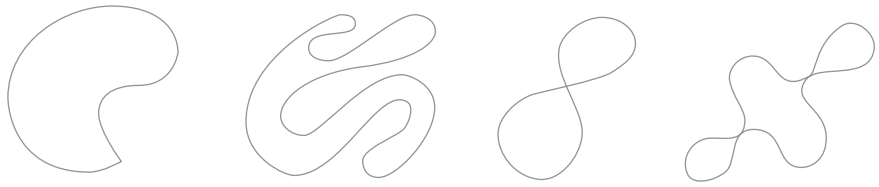


Fig. 342. Caminhos fechados

2. Um **domínio simplesmente conectado** D no plano complexo é um domínio (Seção 13.3) tal que todo caminho fechado simples em D encerra somente pontos de D. *Exemplos:* o interior de um círculo ("disco aberto"), de uma elipse ou de qualquer curva fechada simples. Um domínio que não seja simplesmente conectado é chamado de **multiplamente conectado**. *Exemplos:* um anel (Seção 13.3), um disco desprovido de seu centro, como, por exemplo $0 < |z| < 1$. Veja também a Fig. 343.

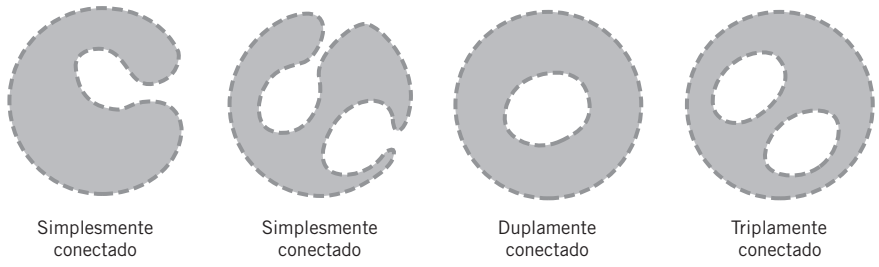


Fig. 343. Domínios simples e multiplamente conectados

Mais precisamente, dizemos que um **domínio limitado** D (ou seja, um domínio que se situa inteiramente em algum círculo ao redor da origem) é ***p* vezes conectado** se seu contorno consistir em p conjuntos conectados e fechados sem pontos comuns. Esses conjuntos podem ser curvas, segmentos ou pontos simples (como $z = 0$ para $0 < |z| < 1$, para os quais $p = 2$). Portanto, D possui $p - 1$ **"buracos"**, onde "buraco" também pode significar um segmento ou mesmo um único ponto. Logo, dizemos que um anel é duplamente conectado ($p = 2$).

TEOREMA 1

Teorema Integral de Cauchy

Se $f(z)$ for analítica num domínio simplesmente conectado D, então, para cada caminho fechado simples C em D,

(1) $$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$ Veja a Fig. 344.

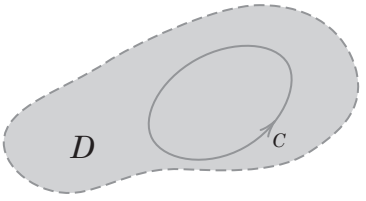


Fig. 344. Teorema integral de Cauchy

Antes de provarmos o teorema, consideremos alguns exemplos de modo a realmente compreendermos o que está se passando. Um caminho fechado simples é às vezes chamado de *contorno*, e uma integral ao longo desse caminho é uma **integral de contorno**. Portanto, (1) e nossos exemplos tratam de integrais de contorno.

EXEMPLO 1 **Ausência de Singularidades (Funções Inteiras)**

$$\oint_C e^z\,dz = 0, \qquad \oint_C \cos z\,dz = 0, \qquad \oint_C z^n\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

para qualquer caminho fechado, visto que essas funções são inteiras (analíticas para todo z). ■

EXEMPLO 2 **Singularidades Fora do Contorno**

$$\oint_C \sec z\,dz = 0, \qquad \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4} = 0$$

onde C é o círculo unitário, $\sec z = 1/\cos z$ não é analítica em $z = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$, embora todos esses pontos estejam situados fora de C; nenhum deles está sobre ou dentro de C. Algo similar se passa com a segunda integral, cujo integrando não é analítico em $z = \pm 2i$ fora de C. ■

EXEMPLO 3 **Função Não-analítica**

$$\oint_C \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\,dt = 2\pi i$$

onde C: $z(t) = e^{it}$ é o círculo unitário. Isso não contradiz o teorema de Cauchy, visto que $f(z) = \bar{z}$ não é analítica. ■

EXEMPLO 4 **Analiticidade Suficiente e Não Necessária**

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

onde C é o círculo unitário. Esse resultado *não* decorre do teorema de Cauchy, porque $f(z) = 1/z^2$ não é analítica em $z = 0$. Logo, *a condição de f ser analítica em D é suficiente, ao invés de ser necessária para que* (1) *se verifique*. ■

EXEMPLO 5 **Condição Essencial para a Conectividade Simples**

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

para a integração anti-horária em torno do círculo unitário (veja a Seção 14.1). C está situada no espaço anular $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$, onde $1/z$ é analítica, porém esse domínio não é simplesmente conectado, de modo que o teorema de Cauchy não pode ser aplicado. Logo, ***a condição de o domínio D ser simplesmente conectado é essencial.***

Em outras palavras, pelo teorema de Cauchy, se $f(z)$ for analítica num caminho fechado simples C e em todos os lugares no interior de C, sem nenhuma exceção, nem mesmo num único ponto, então (1) se verifica. O ponto onde neste caso reside o problema é $z = 0$, onde $1/z$ não é analítica. ■

PROVA Cauchy provou seu teorema integral adotando a suposição adicional de que a derivada $f'(z)$ é contínua (o que é verdadeiro, porém necessitaria de uma prova extra). Essa prova é dada do seguinte modo. De (8) da Seção 14.1, temos

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u\,dx - v\,dy) + i \oint_C (u\,dy + v\,dx).$$

Visto que $f(z)$ é analítica em D, sua derivada $f'(z)$ existe em D. Como se supõe que $f'(z)$ seja contínua, (4) e (5) da Seção 13.4 implicam que u e v possuem derivadas parciais *contínuas* em D. Logo, o teorema de Green (Seção 10.4) (com u e $-v$ no lugar de F_1 e F_2) é aplicável e fornece

$$\oint_C (u\,dx - v\,dy) = \int_R \int \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy$$

onde R é a região delimitada por C. A segunda equação de Cauchy–Riemann (Seção 13.4) mostra que o integrando no lado direito é identicamente nulo. Logo, a integral no lado esquerdo é nula. Da mesma forma, empregando-se a primeira equação de Cauchy–Riemann, segue-se que a última integral na fórmula precedente também é nula. Isso completa a prova de Cauchy. ■

Prova de Goursat *feita sem a condição de f′(z) ser contínua*[1] é mais complicada, de modo que a deixamos como opcional e incluímo-la no Apêndice 4.

Independência do Caminho

Sabemos da seção anterior que o valor da integral de linha de uma dada função $f(z)$, calculada de um ponto z_1 até um ponto z_2, em geral dependerá do caminho C ao longo do qual se faz a integração, não dependendo, portanto, apenas dos pontos z_1 e z_2. É importante caracterizar situações onde essa dificuldade da dependência do caminho não ocorre. Essa tarefa sugere o seguinte conceito. Dizemos que uma integral de $f(z)$ é **independente do caminho num domínio *D*** se, para cada z_1, z_2 em D, o valor dessa integral depende (além de $f(z)$, naturalmente) somente do ponto inicial z_1 e do ponto final z_2, não dependendo, porém, da escolha do caminho C em D [de modo que todo caminho de z_1 a z_2 em D fornece o mesmo valor para a integral de $f(z)$].

TEOREMA 2

Independência do Caminho

Se $f(z)$ for analítica num domínio simplesmente conectado D, então a integral de $f(z)$ é independente do caminho em D.

PROVA Consideremos z_1 e z_2 pontos quaisquer em D. Consideremos também dois caminhos C_1 e C_2 em D unindo z_1 a z_2 sem outros pontos em comum, conforme mostra a Fig. 345. Chamemos de C_2^* o caminho C_2 com a orientação indicada (Fig. 346). Integremos de z_1 a z_2 em C_1, e façamos a integração de volta para z_1 ao longo de C_2^*. Este é um caminho fechado simples e o teorema de Cauchy se aplica sob as suposições que fizemos para o teorema presente, dando um resultado nulo:

$$(2') \qquad \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_2^*} f\,dz = 0, \qquad \text{portanto,} \qquad \int_{C_1} f\,dz = -\int_{C_2^*} f\,dz.$$

Porém, o sinal negativo no lado direito desaparece se integrarmos na direção contrária, de z_1 a z_2, o que mostra que as integrais de $f(z)$ ao longo de C_1 e C_2 são iguais,

$$(2) \qquad \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \qquad \text{(Fig. 345).}$$

[1]ÉDOUARD GOURSAT (1858–1936), matemático francês. Cauchy publicou o teorema em 1825. A retirada dessa condição feita por Goursat (veja *Transactions Amer. Math. Soc.*, vol. 1, 1900) é de grande importância, por exemplo, em conexão com o fato de as derivadas das funções analíticas serem também analíticas, como provaremos em breve. Goursat também prestou importantes contribuições à teoria das EDPs.

Isso prova o teorema para caminhos que têm somente os pontos extremos em comum. Para caminhos que possuem um número maior e finito de pontos comuns, devemos aplicar o argumento presente a cada "laço" (porções de C_1 e C_2 entre pontos comuns consecutivos; na Fig. 347, há quatro laços). Para os caminhos com um número infinito de pontos comuns, necessitaríamos de uma argumentação adicional não apresentada aqui. ■

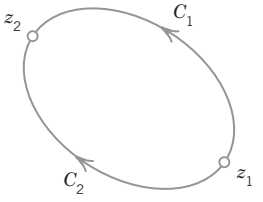


Fig. 345. Fórmula (2)

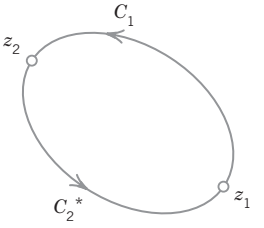


Fig. 346. Fórmula (2′)

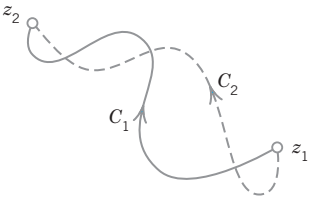


Fig. 347. Caminhos com mais pontos comuns

Princípio da Deformação do Caminho

Essa idéia se relaciona à independência do caminho. Podemos imaginar que, em (2), o caminho C_2 foi obtido de C_1 movendo-se continuamente C_1 (com as extremidades fixas!) até ele coincidir com C_2. A Fig. 348 mostra dois desses caminhos intermediários (entre uma infinidade possível) para os quais a integral sempre conserva seu valor (devido ao Teorema 2). Logo, podemos produzir uma deformação contínua do caminho de uma integral, mantendo suas extremidades fixas. Enquanto o nosso caminho deformado mantiver somente os pontos onde $f(z)$ é analítica, a integral conserva o mesmo valor. Este é o chamado **princípio da deformação do caminho**.

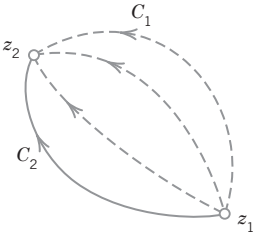


Fig. 348. Deformação contínua do caminho

EXEMPLO 6 **Um Resultado Básico: a Integral de Potências Inteiras**

Do Exemplo 6 da Seção 14.1 e do princípio da deformação do caminho, segue-se que

$$\oint (z - z_0)^m \, dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1 \text{ e inteiro}) \end{cases} \tag{3}$$

para a integração anti-horária ao longo de ***qualquer caminho fechado simples contendo z_0 em seu interior.***

Com efeito, no Exemplo 6 da Seção 14.1, o círculo $|z - z_0| = \rho$ pode ser continuamente deformado em duas etapas, para se transformar num caminho conforme o indicado, a saber, deformando-se primeiro, digamos, um semicírculo e então o outro. (Faça um esboço disso.) ■

Existência da Integral Indefinida

Justificaremos agora nosso método da integração indefinida utilizado na seção anterior [fórmula (9) da Seção 14.1]. A prova necessitará do teorema integral de Cauchy.

TEOREMA 3 **Existência da Integral Indefinida**

Se $f(z)$ for analítica num domínio simplesmente conectado D, então existe uma integral indefinida $F(z)$ de $f(z)$ em D — portanto, $F'(z) = f(z)$ —, que é analítica em D e, para todos os caminhos em D associando dois pontos quaisquer z_0 e z_1 em D, é possível avaliar a integral de $f(z)$ de z_0 a z_1 usando-se a fórmula (9) *da* Seção 14.1.

PROVA As condições do teorema integral de Cauchy são satisfeitas. Logo, a integral de linha de $f(z)$ de um ponto qualquer z_0 em D até um ponto qualquer z em D independe do caminho em D. Mantemos z_0 fixo. Então, essa integral torna-se uma função de z, que chamaremos de $F(z)$,

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z^*)\, dz^* \tag{4}$$

e que é unicamente determinada. Mostremos que essa $F(z)$ é analítica em D e que $F'(z) = f(z)$. A idéia de se fazer isso vem do seguinte. Usando (4), obtemos o quociente da diferença

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z^*)\, dz^* - \int_{z_0}^{z} f(z^*)\, dz^*\right] = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z^*)\, dz^*. \tag{5}$$

Agora, subtraímos $f(z)$ de (5) e mostramos que a expressão resultante aproxima-se de zero à medida que $\Delta z \to 0$. Os detalhes são os seguintes.

Mantemos z fixo. Então, escolhemos $z + \Delta z$ em D de modo que todo o segmento com as extremidades z e $z + \Delta z$ esteja em D (Fig. 349). Podemos fazer isso porque D é um domínio, logo, D contém uma vizinhança de z. Utilizamos então esse segmento como o caminho de integração em (5). Agora, subtraímos $f(z)$. Este valor é uma constante, pois z é mantido fixo. Logo, podemos escrever

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, dz^* = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} dz^* = f(z)\,\Delta z. \qquad \text{Portanto,} \qquad f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z) dz^*.$$

Esse truque e (5) permite-nos obter uma integral única:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)]\, dz^*.$$

Uma vez que $f(z)$ é analítica, ela é contínua. Sendo dado um $\delta > 0$, podemos, portanto, encontrar um $\delta > 0$ tal que $|f(z^*) - f(z)| < \epsilon$ quando $|z^* - z| < \delta$. Logo, deixando $|\Delta z| < \delta$, vemos que a desigualdade *ML* (Seção 14.1) fornece

$$\left|\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)]\, dz^*\right| \leqq \frac{1}{|\Delta z|}\,\epsilon|\Delta z| = \epsilon.$$

Pela definição de limite e derivada, isso prova que

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Uma vez que z é um ponto qualquer em D, isso implica que $F(z)$ é analítica em D e é uma integral indefinida, ou uma antiderivada de $f(z)$ em D escrita como

$$F(z) = \int f(z)\, dz.$$

Além disso, se $G'(z) = f(z)$, então, $F'(z) - G'(z) \equiv 0$ em D; logo, $F(z) - G(z)$ é constante em D (veja o Projeto de Equipe 26 em Problemas Propostos 13.4). Ou seja, duas integrais indefinidas de $f(z)$ podem diferir somente por uma constante. Esta última desaparece em (9) da Seção 14.1, de modo que podemos usar qualquer integral indefinida de $f(z)$. Isso prova o Teorema 3. ■

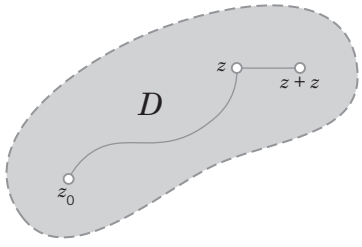


Fig. 349. Caminho de integração

Teorema Integral de Cauchy para Domínios Multiplamente Conectados

O teorema de Cauchy é aplicável aos domínios multiplamente conectados. Primeiro, explicaremos isso para um **domínio duplamente conectado** D delimitado exteriormente por uma curva C_1 e interiormente por um curva

C_2 (Fig. 350). Se uma função $f(z)$ for analítica num domínio qualquer D^* que contenha D e suas curvas-limite, podemos enunciar que

(6)
$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz \qquad \text{(Fig. 350)}$$

sendo ambas as integrais calculadas no sentido anti-horário (ou ambas no sentido horário, e independentemente do fato de o interior completo de C_2 pertencer ou não a D^*).

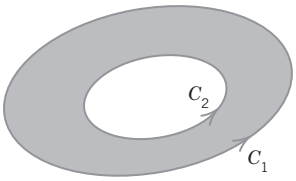


Fig. 350. Caminhos em (5)

PROVA Fazendo dois cortes $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ (Fig. 351), dividimos D em dois domínios simplesmente conectados, D_1 e D_2, nos quais e em cujos contornos $f(z)$ é analítica. Pelo teorema integral de Cauchy, a integral ao longo de todo o contorno de D_1 (calculada no sentido das setas mostradas na Fig. 351) é nula, o mesmo ocorrendo com a integral calculada ao longo do contorno de D_2, sendo, portanto, também nula a soma dessas duas integrais. Nessa soma, as integrais consideradas ao longo dos cortes $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ se cancelam, visto que estamos integrando nos dois sentidos — eis a chave da questão — de modo que ficamos com as integrais ao longo de C_1 (sentido anti-horário) e de C_2 (sentido horário; veja a Fig. 351); logo, invertendo o sentido da integração ao longo de C_2 (passando-o para anti-horário), temos

$$\oint_{C_1} f\,dz - \oint_{C_2} f\,dz = 0$$

de onde (6) decorre. ■

Para os domínios conectados por uma ordem maior, a idéia permanece a mesma. Portanto, para um **domínio triplamente conectado**, utilizamos três cortes, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$ (Fig. 352). Somando as integrais como antes, as integrais ao longo dos cortes se cancelam e a soma das integrais sobre C_1 (sentido anti-horário) e C_2, C_3 (sentido horário) é nula. Logo, a integral sobre C_1 é igual à soma das integrais sobre C_2 e C_3, todas as três agora calculadas no sentido anti-horário. Algo similar se passa com os domínios quadruplamente conectados, e assim por diante.

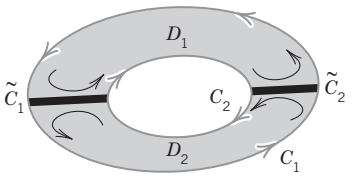


Fig. 351. Domínio duplamente conectado

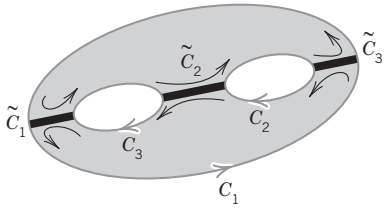


Fig. 352. Domínio triplamente conectado

PROBLEMAS PROPOSTOS 14.2

1–11 APLICABILIDADE DO TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

Integre $f(z)$ ao longo do círculo unitário no sentido anti-horário, indicando se o teorema integral de Cauchy se aplica. (Mostre os detalhes do que fizer.)

1. $f(z) = \operatorname{Re} z$

2. $f(z) = 1/(3z - \pi i)$

3. $f(z) = e^{z^2/2}$

4. $f(z) = 1/\bar{z}$

5. $f(z) = \tan z^2$

6. $f(z) = \sec(z/2)$

7. $f(z) = 1/(z^8 - 1{,}2)$

8. $f(z) = 1/(4z - 3)$

9. $f(z) = 1/(2|z|^3)$

10. $f(z) = \bar{z}^2$

11. $f(z) = z^2 \cot z$

12–17 COMENTÁRIOS SOBRE O TEXTO E EXEMPLOS

12. (Singularidades) No Exemplo 2, você consegue concluir que a integral de $1/(z^2 + 4)$ calculada ao longo de (a) $|z - 2| = 2$, (b) $|z - 2| = 3$ é nula? Justifique.

13. (Teorema integral de Cauchy) Verifique o Teorema 1 para a integral de z^2 sobre o contorno do quadrado que possui os vértices $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, e $1 - i$ (no sentido anti-horário).

14. (Teorema integral de Cauchy) Para quais contornos C o Teorema 1 implicará que

$$\text{(a)}\quad \oint_C \frac{dz}{z} = 0, \qquad \text{(b)}\quad \oint_C \frac{\cos z}{z^6 - z^2}\, dz = 0,$$

$$\text{(c)}\quad \oint_C \frac{e^{1/z}}{z^2 + 9}\, dz = 0?$$

15. (Princípio da deformação) Baseando-se no Exemplo 4, você seria capaz de concluir que a integral é também nula ao longo do contorno no Problema 13?

16. (Princípio da deformação) Se a integral de uma função $f(z)$ sobre o círculo unitário for igual a 3 e sobre o círculo $|z| = 2$ for igual a 5, poderíamos então concluir que $f(z)$ é analítica em qualquer lugar do anel $1 < |z| < 2$?

17. (Independência do caminho) Verifique o Teorema 2 para a integral de cos z de 0 a $(1 + i)\pi$ (a) sobre o caminho mais curto, (b) sobre o eixo x até π e então diretamente até $(1 + i)\pi$.

18. PROJETO DE EQUIPE. Teorema integral de Cauchy. (a) Aspectos Principais. Cada um dos problemas nos Exemplos 1–5 explica um fato básico relacionado ao teorema de Cauchy. Encontre cinco exemplos de sua própria escolha, mais complicados se for possível, cada qual ilustrando um desses fatos.

(b) Frações parciais. Escreva $f(z)$ em termos de frações parciais e faça a integração no sentido anti-horário sobre o círculo unitário, onde

$$\text{(i)}\quad f(z) = \frac{2z + 3i}{z^2 + \frac{1}{4}} \qquad \text{(ii)}\quad f(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 2z}.$$

(c) Deformação do caminho. Reveja (c) e (d) do Projeto de Equipe 34 da Seção 14.1, sob a óptica do princípio da deformação do caminho. Então, considere uma outra família de caminhos com pontos extremos em comum, digamos, $z(t) = t + ia(t - t^2)$, $0 \leqq t \leqq 1$, e faça experiências com a integração de funções analíticas e não-analíticas de sua própria escolha sobre esses caminhos (p. ex., z, Im z, z^2, Re z^2, Im z^2, etc.)

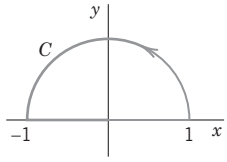
19–30 OUTRAS INTEGRAIS DE CONTORNO

Avalie (mostrando os detalhes e usando frações parciais caso necessário)

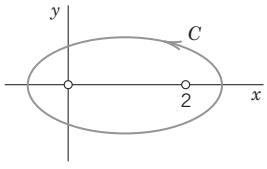
19. $\oint_C \dfrac{dz}{2z - i}$, sendo C o círculo $|z| = 3$ (sentido anti-horário)

20. $\oint_C \tanh z\, dz$, sendo C o círculo $|z - \frac{1}{4}\pi i| = \frac{1}{2}$ (sentido horário)

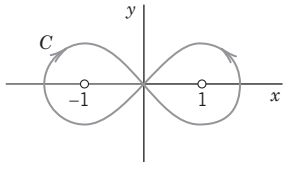
21. $\oint_C \text{Re}\, 2z\, dz$, sendo C a figura a seguir



22. $\oint_C \dfrac{7z - 6}{z^2 - 2z}\, dz$, sendo C a figura a seguir



23. $\oint_C \dfrac{dz}{z^2 - 1}$, sendo C a figura a seguir



24. $\oint_C \dfrac{e^{2z}}{4z}\, dz$, com C consistindo em $|z| = 2$ (sentido horário) e de $|z| = \frac{1}{2}$ (sentido anti-horário)

25. $\oint_C \dfrac{\cos z}{z}\, dz$, com C consistindo em $|z| = 1$ (sentido anti-horário) e de $|z| = 3$ (sentido horário)

26. $\oint_C \text{Ln}\,(2 + z)\, dz$, sendo C o contorno do quadrado de vértices $\pm 1, \pm i$

27. $\oint_C \dfrac{dz}{z^2 + 1}$, *C:* (a) $|z| = \frac{1}{2}$, (b) $|z - i| = \frac{3}{2}$ (sentido anti-horário)

28. $\oint_C \dfrac{dz}{z^2 + 1}$, *C:* (a) $|z + i| = 1$, (b) $|z - i| = 1$ (sentido anti-horário)

29. $\oint_C \dfrac{\text{sen}\, z}{z + 2i}\, dz$, *C:* $|z - 4 - 2i| = 5{,}5$ (sentido horário)

30. $\oint_C \dfrac{\tan (z/2)}{z^4 - 16}\, dz$, sendo C o contorno do quadrado de vértices ± 1, $\pm i$ (sentido horário)

14.3 Fórmula Integral de Cauchy

A conseqüência mais importante do teorema integral de Cauchy é a fórmula integral de Cauchy. Essa fórmula é útil para avaliar integrais, conforme mostraremos a seguir. Ainda mais importante é o seu papel-chave ao fornecer o fato surpreendente de que as funções analíticas possuem derivadas de todas as ordens (Seção 14.4), no estabelecimento de representações por séries de Taylor (Seção 15.4), e assim por diante. A fórmula integral de Cauchy e suas condições de validade podem ser enunciadas do seguinte modo.

TEOREMA 1

Fórmula Integral de Cauchy

Consideremos que $f(z)$ seja analítica num domínio simplesmente conectado D. Então, para qualquer ponto z_0 em D e qualquer caminho fechado simples C em D que encerra z_0 (Fig. 353),

(1) $$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$$ **(fórmula integral de Cauchy)**

com a integração sendo feita no sentido anti-horário. *Alternativamente* (para representar $f(z_0)$ por meio de uma integral de contorno, dividimos (1) por $2\pi i$),

(1*) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$ **(fórmula integral de Cauchy).**

PROVA Por adição e subtração, $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$. Inserindo essa expressão em (1) no lado esquerdo e tirando o fator constante $f(z_0)$ de dentro do sinal da integral, temos

(2) $$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z - z_0} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.$$

O primeiro termo no lado direito é igual a $f(z_0) \cdot 2\pi i$ (veja o Exemplo 6 da Seção 14.2 com $m = -1$). Isso prova o teorema, desde que a segunda integral no lado direito seja nula; e isso é o que iremos mostrar agora. Seu integrando é uma função analítica, excetuando-se em z_0. Logo, por (6) da Seção 14.2, podemos substituir C por um pequeno círculo K de raio ρ e centro z_0 (Fig. 354), sem alterar o valor da integral. Como $f(z)$ é analítica, ela é contínua (Projeto de Equipe 26, Seção 13.3). Logo, para um certo $\varepsilon > 0$ dado, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ para todo z no disco $|z - z_0| < \delta$. Escolhendo o raio ρ de K com um valor menor que o de δ, temos, portanto, a desigualdade

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\epsilon}{\rho}$$

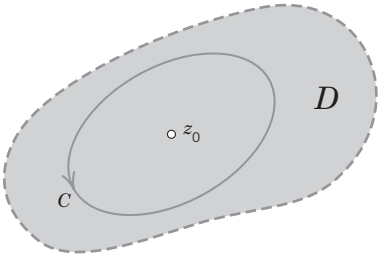


Fig. 353. Fórmula integral de Cauchy

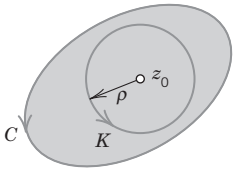


Fig. 354. Prova da fórmula integral de Cauchy

em cada ponto de K. O comprimento de K é $2\pi\rho$. Logo, pela desigualdade ML da Seção 14.1,

$$\left|\oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\right| < \frac{\epsilon}{\rho}\, 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

Uma vez que é possível escolher para ϵ (> 0) um valor arbitrariamente pequeno, segue-se que a última integral em (2) precisa ser nula e isso prova o teorema. ■

EXEMPLO 1 **Fórmula Integral de Cauchy**

$$\oint_C \frac{e^z}{z - 2}\, dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=2} = 2\pi i e^2 = 46{,}4268\, i$$

para qualquer contorno encerrando $z_0 = 2$ (visto que e^z é uma função inteira) e zero para qualquer contorno para o qual $z_0 = 2$ tenha uma localização externa (pelo teorema integral de Cauchy). ■

EXEMPLO 2 **Fórmula Integral de Cauchy**

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z^3 - 6}{2z - i}\, dz &= \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3 - 3}{z - \frac{1}{2}i}\, dz \\ &= 2\pi i\left[\tfrac{1}{2}z^3 - 3\right]\Big|_{z=i/2} \\ &= \frac{\pi}{8} - 6\pi i \qquad (z_0 = \tfrac{1}{2}i \text{ dentro de } C).\end{aligned}$$ ■

EXEMPLO 3 Integração por Diferentes Contornos

Integre

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 1)}$$

no sentido anti-horário em torno de cada um dos quatro círculos da Fig. 355.

Solução. $g(z)$ não é analítica em –1 e 1. Esses são os pontos que temos que observar. Consideremos cada círculo separadamente.

(a) O círculo $|z - 1| = 1$ encerra o ponto $z_0 = 1$ onde $g(z)$ não é analítica. Logo, em (1), temos que escrever

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z + 1} \frac{1}{z - 1};$$

portanto,

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}$$

e (1) fornece

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \left[\frac{z^2 + 1}{z + 1} \right]_{z=1} = 2\pi i.$$

(b) fornece o mesmo que (a), pelo princípio da deformação do caminho.

(c) A função $g(z)$ é como antes, porém $f(z)$ se altera, porque precisamos fazer $z_0 = -1$ (ao invés de 1). Isso fornece um fator $z - z_0 = z + 1$ em (1). Logo, precisamos escrever

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1} \frac{1}{z + 1};$$

portanto,

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}.$$

Compare isso por um minuto com a expressão anterior e depois continue:

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \left[\frac{z^2 + 1}{z - 1} \right]_{z=-1} = -2\pi i.$$

(d) fornece 0. Por quê? ■

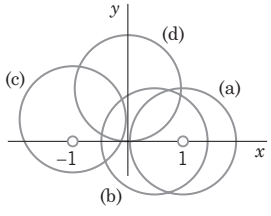


Fig. 355. Exemplo 3

Podem-se manipular os **domínios multiplamente conectados** do mesmo modo que na Seção 14.2. Por exemplo, se $f(z)$ for analítica em C_1 e C_2 e no domínio anular delimitado por C_1 e C_2 (Fig. 356) e se z_0 for um ponto qualquer nesse domínio, então,

(3)
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

onde a integral externa (sobre C_1) é calculada no sentido anti-horário, e a integral interna, no sentido horário, conforme indicado na Fig. 356.

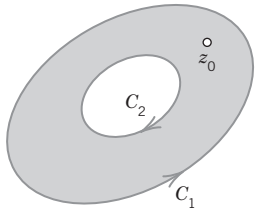


Fig. 356. Fórmula (3)

Nossa discussão nesta seção ilustrou o uso da fórmula integral de Cauchy na integração. Na próxima seção, mostraremos que essa fórmula desempenha um papel-chave ao fornecer o fato surpreendente de que uma função analítica possui derivadas de todas as ordens, que são, portanto, funções analíticas elas próprias.

PROBLEMAS PROPOSTOS 14.3

1–4 INTEGRAÇÃO DE CONTORNO

Integre $(z^2 - 4)/(z^2 + 4)$ no sentido anti-horário ao redor do círculo:

1. $|z - i| = 2$ **2.** $|z - 1| = 2$

3. $|z + 3i| = 2$ **4.** $|z| = \pi/2$

5–17 INTEGRAÇÃO DE CONTORNO

Usando a fórmula integral de Cauchy (e mostrando os detalhes do que fizer), integre no sentido anti-horário (ou conforme o indicado)

5. $\oint_C \dfrac{z+2}{z-2}\,dz, \quad C: |z-1| = 2$

6. $\oint_C \dfrac{e^{3z}}{3z-i}\,dz, \quad C: |z| = 1$

7. $\oint_C \dfrac{\operatorname{senh} \pi z}{z^2 - 3z}\,dz, \quad C: |z| = 1$

8. $\oint_C \dfrac{dz}{z^2-1}, \quad C: |z-1| = \pi/2$

9. $\oint_C \dfrac{dz}{z^2-1}, \quad C: |z+1| = 1$

10. $\oint_C \dfrac{e^z}{z-2i}\,dz, \quad C: |z-2i| = 4$

11. $\oint_C \dfrac{\cos z}{2z}\,dz, \quad C: |z| = \frac{1}{2}$

12. $\oint_C \dfrac{\tan z}{z-i}\,dz$ com C sendo o contorno do triângulo de vértices 0 e $\pm 1 + 2i$

13. $\oint_C \dfrac{e^{-3\pi z}}{2z+i}\,dz$ com C sendo o contorno do quadrado de vértices $\pm 1, \pm i$

14. $\oint_C \dfrac{\operatorname{Ln}(z+1)}{z^2+1}\,dz$ com C consistindo em $|z - 2i| = 2$ (sentido anti-horário) e de $|z - 2i| = \frac{1}{2}$ (sentido horário)

15. $\oint_C \dfrac{\operatorname{Ln}(z-1)}{z-5}\,dz, \quad C: |z-4| = 2$

16. $\oint_C \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2 - 2iz}\,dz$ com C consistindo em $|z| = 3$ (sentido anti-horário) e de $|z| = 1$ (sentido horário)

17. $\oint_C \dfrac{\cosh^2 z}{(z-1-i)z^2}\,dz$ com C como no Problema 16

18. Mostre que $\oint_C (z - z_1)^{-1}(z - z_2)^{-1}\,dz = 0$ para um caminho fechado simples C encerrando z_1 e z_2, que são arbitrários.

19. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Integração de Contorno. Faça experiências para descobrir até quando seu programa de álgebra computacional é capaz de realizar a integração de contorno: (a) usando o segundo método da Seção 14.1 e (b) pela fórmula integral de Cauchy.

20. PROJETO DE EQUIPE. Teorema Integral de Cauchy. Adquira uma compreensão adicional da prova do teorema integral de Cauchy chegando ao resultado (2) por meio de um contorno que encerre z_0 (como na Fig. 353) e tomando o limite como no texto. Escolha

(a) $\oint_C \dfrac{z^3 - 6}{z - \frac{1}{2}i}\,dz$, (b) $\oint_C \dfrac{\operatorname{sen} z}{z - \frac{1}{2}\pi}\,dz$,

e (c) com dois outros exemplos que você próprio determinar.

14.4 Derivadas das Funções Analíticas

Nesta seção, utilizaremos a fórmula integral de Cauchy para mostrar o fato básico de que ***as funções analíticas complexas têm derivadas de todas as ordens***. Isso é bastante surpreendente, pois difere marcantemente da situação no cálculo real. Com efeito, se uma função *real* for uma vez derivável, nada se pode concluir sobre a existência de derivadas de segunda ordem ou de ordem superior. Portanto, quanto a este aspecto, as funções analíticas complexas comportam-se de modo muito mais simples que as funções reais uma vez deriváveis.

A existência dessas derivadas resultará de uma fórmula geral de integração do seguinte modo.

TEOREMA 1

Derivadas de uma Função Analítica

Se $f(z)$ for analítica num domínio D, então ela possui derivadas de todas as ordens em D, as quais por sua vez são também funções analíticas em D. Os valores dessas derivadas num ponto z_0 de D são dados pelas fórmulas

$$(1') \qquad f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz$$

(1″) $$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\,dz$$

e, em geral,

(1) $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 1, 2, \cdots);$$

onde C é um caminho fechado simples em D que encerra z_0 e cujo interior completo pertence a D; fazemos então a integração no sentido anti-horário em torno de C (Fig. 357).

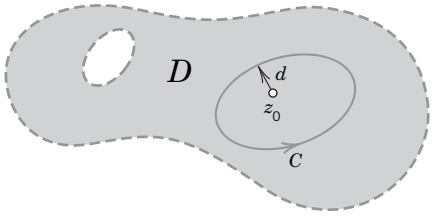


Fig. 357. Teorema 1 e sua prova

COMENTÁRIO. Para memorizar (1), é útil observar que essas fórmulas são obtidas formalmente derivando-se a fórmula de Cauchy (1*) da Seção 14.3, sob o sinal da integração *em relação a* z_0.

PROVA Provemos (1′) começando da definição de derivada

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

No lado direito, representamos $f(z_0 + \Delta z)$ e $f(z_0)$ pela fórmula integral de Cauchy:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\right].$$

Agora, escrevemos as duas integrais na forma de uma única integral. Reduzindo ao denominador comum, obtemos o numerador $f(z)\{z - z_0 - [z - (z_0 + \Delta z)]\} = f(z)\,\Delta z$, de modo que um fator Δz desaparece e obtemos

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}\,dz.$$

Fica claro que agora podemos chegar a (1′) mostrando que, à medida que $\Delta z \to 0$, a integral no lado direito aproxima-se da integral em (1′). Para fazermos isso, consideremos a diferença entre essas duas integrais. Podemos escrever essa diferença como uma integral única, reduzindo ao denominador comum e simplificando o numerador (como fizemos antes). Isso fornece

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz = \oint_C \frac{f(z)\,\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}\,dz.$$

Mostremos que, pela desigualdade *ML* (Seção 14.1), a integral no lado direito aproxima-se de zero à medida que $\Delta z \to 0$.

Sendo analítica, a função $f(z)$ é contínua em C, logo, tem seu valor absoluto limitado, digamos, $|f(z)| \leqq K$. Chamemos de d a menor distância entre z_0 e os pontos de C (veja a Fig. 357). Então, para todo z em C,

$$|z - z_0|^2 \geqq d^2, \qquad \text{logo,} \qquad \frac{1}{|z - z_0|^2} \leqq \frac{1}{d^2}.$$

Além disso, pela desigualdade do triângulo para todo z em C, temos também, então,

$$d \leqq |z - z_0| = |z - z_0 - \Delta z + \Delta z| \leqq |z - z_0 - \Delta z| + |\Delta z|.$$

Agora, subtraímos $|\Delta z|$ em ambos os lados e consideramos $|\Delta z| \leqq d/2$, de modo que $-|\Delta z| \geqq -d/2$. Dessa forma,

$$\tfrac{1}{2}d \leqq d - |\Delta z| \leqq |z - z_0 - \Delta z|. \qquad \text{Logo,} \qquad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leqq \frac{2}{d}.$$

Chamemos de L o comprimento de C. Se $|\Delta z| \leqq d/2$, então, pela desigualdade ML,

$$\left| \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}\, dz \right| \leqq KL\,|\Delta z|\,\frac{2}{d} \cdot \frac{1}{d^2}\,.$$

Esse valor aproxima-se de zero à medida que $\Delta z \to 0$. Desse modo, a fórmula (1′) fica provada.

Note que utilizamos a fórmula integral de Cauchy (1*) da Seção 14.3, porém, se tudo o que soubéssemos sobre $f(z)$ fosse que ela podia ser representada por (1*) da Seção 14.3, nosso argumento teria estabelecido a existência da derivada $f'(z_0)$ de $f(z)$. Isso é essencial para a continuação e a conclusão desta prova, pois implica o fato de que é possível provar (1″) através de um argumento semelhante, com f sendo substituída por f', e que a fórmula geral (1) decorre por indução. ■

EXEMPLO 1 **Avaliação de Integrais de Linha**

De (1′), para qualquer contorno encerrando o ponto πi (no sentido anti-horário),

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z - \pi i)^2}\, dz = 2\pi i(\cos z)'\Big|_{z=\pi i} = -2\pi i \operatorname{sen} \pi i = 2\pi \operatorname{senh} \pi.$$ ■

EXEMPLO 2 De (1′), para qualquer contorno encerrando o ponto $-i$, obtemos, pela integração no sentido anti-horário,

$$\oint_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + i)^3}\, dz = \pi i(z^4 - 3z^2 + 6)''\Big|_{z=-i} = \pi i\big[12z^2 - 6\big]_{z=-i} = -18\pi i.$$ ■

EXEMPLO 3 De (1′), para qualquer contorno para o qual 1 se situa no interior e $\pm 2i$ no exterior (sentido anti-horário),

$$\oint_C \frac{e^z}{(z - 1)^2(z^2 + 4)}\, dz = 2\pi i\left(\frac{e^z}{z^2 + 4}\right)'\Big|_{z=1}$$

$$= 2\pi i \frac{e^z(z^2 + 4) - e^z 2z}{(z^2 + 4)^2}\Big|_{z=1} = \frac{6e\pi}{25}\, i \approx 2{,}050\, i.$$ ■

Desigualdade de Cauchy. Teoremas de Liouville e Morera

Como um novo aspecto do teorema integral de Cauchy, mostremos agora que ele é também fundamental na obtenção de resultados gerais acerca das funções analíticas.

Desigualdade de Cauchy. O Teorema 1 fornece uma desigualdade básica que possui diversas aplicações. Para obtê-la, tudo o que temos que fazer é escolher para C em (1) um círculo de raio r e centro z_0 e aplicar a desigualdade ML (Seção 14.1); com $|f(z)| \leqq M$ em C, obtemos de (1),

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \right| \leqq \frac{n!}{2\pi}\, M\, \frac{1}{r^{n+1}}\, 2\pi r.$$

Isso fornece a **desigualdade de Cauchy**

(2)
$$|f^{(n)}(z_0)| \leqq \frac{n!M}{r^n}\,.$$

A fim de ganharmos uma primeira impressão da importância dessa desigualdade, provemos um famoso teorema sobre as funções inteiras (cuja definição está na Seção 13.5). (Dados biográficos sobre Liouville são fornecidos na Seção 5.7.)

TEOREMA 2 **Teorema de Liouville**

Se uma função inteira for limitada em valor absoluto em todo o plano complexo, então essa função necessariamente é uma constante.

PROVA Por suposição, $|f(z)|$ é limitado, digamos, $|f(z)| < K$ para todo z. Usando (2), vemos que $|f'(z_0)| < K/r$. Uma vez que $f(z)$ é inteira, isso se verifica para todo r, de modo que podemos considerar r tão grande quanto quisermos e concluirmos que $f'(z_0) = 0$. Como z_0 é arbitrário, $f'(z) = u_x + iv_x = 0$ para todo z (veja (4) da Seção 13.4), logo $u_x = v_x = 0$, e $u_y = v_y = 0$, pelas equações de Cauchy–Riemann. Portanto, $u = const.$ $v = const.$ e $f = u + iv = const.$ para todo z. Isso completa a prova. ■

Uma outra conseqüência bastante interessante do Teorema 1 é o

TEOREMA 3

Teorema de Morera[2] (Teorema Integral Reverso de Cauchy)

Se $f(z)$ for contínua num domínio simplesmente conectado D e se

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{3}$$

para todo caminho fechado em D, então $f(z)$ é analítica em D.

PROVA Na Seção 14.2, mostramos que, se $f(z)$ for analítica num domínio simplesmente conectado D, então

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z^*)\,dz^*$$

é analítica em D e $F'(z) = f(z)$. Na prova, usamos somente a continuidade de $f(z)$ e a propriedade de que sua integral em torno de todo caminho fechado em D é nula; dessas suposições, concluímos que $F(z)$ é analítica. Pelo Teorema 1, a derivada de $F(z)$ é analítica, ou seja, $f(z)$ é analítica em D, e isso prova o teorema de Morera. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 14.4

1–8 INTEGRAÇÃO DE CONTORNO

Integre no sentido anti-horário ao redor do círculo $|z| = 2$ (n é um inteiro positivo, a é arbitrário). Mostre os detalhes do que fizer.

1. $\dfrac{\cosh 3z}{z^5}$

2. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi i/2)^4}$

3. $\dfrac{e^z \cos z}{(z - \pi/2)^2}$

4. $\dfrac{\cos z}{z^{2n+1}}$

5. $\dfrac{\operatorname{senh} az}{z^4}$

6. $\dfrac{\operatorname{Ln}(z + 3) + \cos z}{(z + 1)^2}$

7. $\dfrac{z^n}{(z - a)^{n+1}}$

8. $\dfrac{e^z}{(z - a)^n}$

9–13 INTEGRAÇÃO SOBRE DIFERENTES CONTORNOS

Integre ao redor de C. Mostre os detalhes do que fizer.

9. $\dfrac{(1 + 2z)\cos z}{(2z - 1)^2}$, com C sendo o círculo unitário, no sentido anti-horário

10. $\dfrac{\operatorname{sen} 4z}{(z - 4)^3}$, com C consistindo em $|z| = 5$ (sentido anti-horário) e de $|z - 3| = \frac{3}{2}$ (sentido horário)

11. $\dfrac{\tan \pi z}{z^2}$, com C sendo a elipse $16x^2 + y^2 = 1$ (sentido anti-horário)

12. $\dfrac{e^{2z}}{z(z - 2i)^2}$, com C consistindo em $|z - i| = 3$ (sentido anti-horário) e de $|z| = 1$ (sentido horário)

13. $\dfrac{e^{z/2}}{(z - a)^4}$, com C consistindo em $|z - 2 - i| = 3$ (sentido anti-horário)

14. PROJETO DE EQUIPE. Teoria do Crescimento

(a) Crescimento de funções inteiras. Se $f(z)$ não for uma constante e for analítica para todo z (finito), e se R e M forem números quaisquer reais positivos (não importando quão grandes), mostre que existem valores de z para os quais $|z| > R$ e $|f(z)| > M$.

(b) Crescimento de polinômios. Se $f(z)$ for um polinômio de grau $n > 0$ e se M for um número real positivo arbitrário (não importando quão grande), mostre que existe um número real positivo R tal que $|f(z)| > M$ para todo $|z| > R$.

(c) Função exponencial. Mostre que $f(z) = e^z$ possui a propriedade caracterizada em (a), porém não tem a propriedade caracterizada em (b).

(d) Teorema fundamental da álgebra. *Se $f(z)$ for um polinômio em z, e não uma constante, então $f(z) = 0$ para pelo menos um valor de z.* Prove isso utilizando (a).

15. (Prova do Teorema 1) Complete a prova do Teorema 1 realizando a indução mencionada no final.

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 14

1. O que é um caminho de integração? Que suposições se fazem sobre esses caminhos?

2. Forneça de memória a definição de uma integral de linha complexa.

3. O que queremos dizer quando falamos que a integração complexa é uma operação linear?

4. Faça uma lista dos métodos de integração discutidos. Ilustre cada um com um exemplo simples.

5. Quais métodos de integração se aplicam apenas às funções analíticas?

6. Que valor obtemos se integrarmos $1/z$ no sentido anti-horário em torno do círculo unitário? (Você deve memorizar este resultado básico.) E se integrarmos $1/z^2$, $1/z^3$, $\cdots$?

[2] GIACINTO MORERA (1856–1909), matemático italiano, que trabalhou em Gênova e Turim.

7. Qual teorema neste capítulo você considera como o mais importante? Enuncie-o de memória.

8. O que é a independência do caminho? Qual é o princípio da deformação do caminho? Por que ele é importante?

9. Não confunda o teorema integral de Cauchy com a fórmula integral de Cauchy. Enuncie ambos. Como eles se relacionam?

10. Como é possível estender o teorema integral de Cauchy para domínios dupla e triplamente conectados?

11. Se a integração de $f(z)$ sobre os círculos de contorno de um anel D fornece valores diferentes, pode $f(z)$ ser analítica em D? (Justifique.)

12. A igualdade $\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \int_C |f(z)|\,dz$ se verifica? Como você encontraria um limite para a integral no lado esquerdo?

13. A igualdade $\text{Re}\int_C f(z)\,dz = \int_C \text{Re}\, f(z)\,dz$ se verifica? Dê exemplos.

14. Como utilizamos as fórmulas integrais para as derivadas na integração?

15. O que é o teorema de Liouville? Dê exemplos. Enuncie suas conseqüências.

16–30 INTEGRAÇÃO

Integre empregando um método adequado:

16. $4z^3 + 2z$ de $-i$ to $2 + i$ ao longo de qualquer caminho

17. $5z - 3/z$ no sentido anti-horário em torno do círculo unitário

18. $z + 1/z$ no sentido anti-horário em torno de $|z + 3i| = 2$

19. e^{2z} a partir de $-2 + 3\pi i$ ao longo do segmento de reta até $-2 + 5\pi i$

20. $e^{z^2}/(z - 1)^2$ no sentido anti-horário em torno de $|z| = 2$

21. $z/(z^2 + 1)$ no sentido horário em torno de $|z + i| = 1$

22. Considerando Re z de 0 a 4 e depois diretamente na vertical até $4 + 3i$

23. cosh $4z$ de 0 a $2i$ ao longo do eixo imaginário

24. e^z/z sobre C descrito por $|z| = 1$ (sentido anti-horário) e $|z| = \frac{1}{2}$ (sentido horário)

25. (sen z)/z no sentido horário em torno de um círculo contendo $z = 0$ em seu interior

26. Im z no sentido anti-horário em torno de $|z| = r$

27. (Ln z)/$(z - 2i)^2$ no sentido anti-horário em torno de $|z - 2i| = 1$

28. (tan πz)/$(z - 1)^2$ no sentido anti-horário em torno de $|z - 1| = 0{,}2$

29. $|z| + z$ no sentido horário em torno do círculo unitário

30. $(z - i)^{-3}(z^3 + \text{sen}\, z)$ no sentido anti-horário em torno de qualquer círculo com centro em i

RESUMO DO CAPÍTULO 14
Integração Complexa

A **integral de linha complexa** de uma função $f(z)$ calculada ao longo de um caminho C é representada por

(1) $$\int_C f(z)\,dz \qquad \text{ou, se } C \text{ for fechado, também por} \qquad \oint_C f(z)$$ (Seção 14.1).

Se $f(z)$ for analítica num domínio simplesmente conectado D, então é possível avaliar (1) como no cálculo, por meio de uma integração indefinida e da substituição dos limites, ou seja,

(2) $$\int_C f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) \qquad [F'(z) = f(z)]$$

para cada caminho C em D indo de um ponto z_0 até um ponto z_1 (veja a Seção 14.1). Essas suposições implicam a **independência do caminho**, ou seja, (2) depende somente de z_0 e z_1 (e, naturalmente, de $f(z)$), porém não depende da escolha de C (Seção 14.2). A existência de uma $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ é provada na Seção 14.2 pelo teorema integral de Cauchy (veja a seguir).

Um método geral de integração que, entretanto, não se restringe às funções analíticas, utiliza a equação $z = z(t)$ de C, onde $a \leqq t \leqq b$,

(3) $$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt \qquad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt}\right).$$

O **teorema integral de Cauchy** é o teorema mais importante deste capítulo. Segundo ele, se $f(z)$ for analítica num domínio simplesmente conectado D, então, para cada caminho fechado C em D (Seção 14.2),

(4) $$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Sob as mesmas suposições e para um z_0 qualquer em D e um caminho fechado C em D contendo z_0 em seu interior, temos também a **fórmula integral de Cauchy**

(5) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Além disso, sob essas suposições, $f(z)$ possui derivadas de todas as ordens em D, que são elas próprias funções analíticas em D e (Seção 14.4)

(6) $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Isso implica o *teorema de Morera* (ou teorema integral reverso de Cauchy) e a *desigualdade de Cauchy* (Seção 14.4), que, por sua vez, implica o *teorema de Liouville*, segundo o qual uma função inteira que seja limitada em todo o plano complexo necessariamente é constante.

CAPÍTULO 15

Séries de Potências, Séries de Taylor

As séries de potências de números complexos, particularmente as séries de Taylor, são análogas às séries de potências e às séries de Taylor de números reais encontradas no cálculo. Entretanto, elas possuem um papel muito mais fundamental em análise complexa do que suas contrapartes reais no cálculo. A razão disso é que as séries de potências representam funções analíticas (Seção 15.3) e, inversamente, toda função analítica pode ser representada por séries de potências, chamadas de séries de Taylor (Seção 15.4).

Use a Seção 15.1 como referência, caso já esteja familiarizado com os testes de convergência para séries *reais* — há uma grande similaridade entre os casos real e complexo. A última seção (15.5), sobre convergência uniforme, é *opcional*.

Pré-requisitos: Capítulos 13, 14
Seções que podem ser omitidas num curso mais curto: 14.1, 14.5.
Referências e Respostas dos Problemas: Parte D do Apêndice 1 e Apêndice 2.

15.1 Seqüências, Séries, Testes de Convergência

Nesta seção, definiremos os conceitos básicos de seqüências e séries ***complexas***, e discutiremos os testes de convergência e divergência. Esse assunto é bastante similar às seqüências e séries *reais* do cálculo. ***Se estas últimas já lhe forem bem familiares e se você quiser aceitar sem prova que o teste da razão também se verifica no caso complexo, salte esta seção e vá diretamente para a*** **Seção 15.2.**

Seqüências

As definições básicas são como no cálculo. Uma *seqüência infinita* ou, resumidamente, uma **seqüência**, é obtida atribuindo-se a cada inteiro positivo n um número z_n, chamado de **termo** da seqüência, que é escrita como

$$z_1, z_2, \cdots \qquad \text{ou} \qquad \{z_1, z_2, \cdots\} \qquad \text{ou, resumidamente,} \qquad \{z_n\}.$$

Podemos também escrever $z_0, z_1, \cdots$ ou $z_2, z_3, \cdots$, ou começar com outro número inteiro, caso isso seja conveniente.

Uma **seqüência real** é aquela cujos termos são reais.

Convergência. Uma **seqüência convergente** $z_1, z_2 \cdots$ é aquela que possui um limite c, o que se escreve como

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \qquad \text{ou, simplesmente,} \qquad z_n \to c.$$

Por definição de **limite**, isso significa que, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um N tal que

$$|z_n - c| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N; \tag{1}$$

geometricamente, todos os termos z_n com $n > N$ situam-se no disco aberto de raio ϵ e centro c (Fig. 358) e somente um número finito de termos não se encontra nesse disco. [Para uma seqüência *real*, (1) fornece um intervalo aberto de comprimento 2ϵ e um ponto central real c situado sobre a reta dos números reais; veja a Fig. 359.]

Uma **seqüência divergente** é aquela que não converge.

EXEMPLO 1 **Seqüências Convergentes e Divergentes**

A seqüência $\{i^n/n\} = \{i, -1/2, -i/3, 1/4, \cdots\}$ é convergente com o limite 0.

A seqüência $\{i^n\} = \{i, -1, -i, 1, \cdots\}$ é divergente, como também o é $\{z_n\}$ com $z_n = (1 + i)^n$. ■

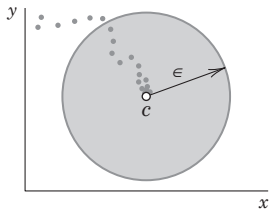


Fig. 358. Seqüência complexa convergente

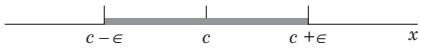


Fig. 359. Seqüência real convergente

EXEMPLO 2 **Seqüências das Partes Reais e Imaginárias**

A seqüência $\{z_n\}$ com $z_n = x_n + iy_n = 1 - 1/n^2 + i(2 + 4/n)$ é $6i$, $3/4 + 4i$, $8/9 + 10i/3$, $15/16 + 3i$, $\cdots$. (Esboce-a.) Ela converge com o limite $c = 1 + 2i$. Observe que $\{x_n\}$ tem o limite $1 = \text{Re } c$ e $\{y_n\}$ tem o limite $2 = \text{Im } c$. Isso usualmente ocorre e ilustra o seguinte teorema, pelo qual a convergência de uma seqüência *complexa* pode ser decomposta na convergência de duas seqüências *reais*, das partes reais e das partes imaginárias. ■

TEOREMA 1

Seqüência das Partes Reais e Imaginárias

Uma seqüência $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ de números complexos $z_n = x_n + iy_n$ (onde $n = 1, 2, \cdots$) converge para $c = a + ib$ se e somente se a seqüência das partes reais $x_1, x_2, \cdots$ convergir para a e a seqüência das partes imaginárias $y_1, y_2, \cdots$ convergir para b.

PROVA A convergência $z_n \to c = a + ib$ implica as convergências $x_n \to a$ e $y_n \to b$, pois se $|z_n - c| < \epsilon$, então z_n situa-se dentro do círculo de raio ϵ em torno de $c = a + ib$, de modo que (Fig. 360a)

$$|x_n - a| < \epsilon, \qquad |y_n - b| < \epsilon.$$

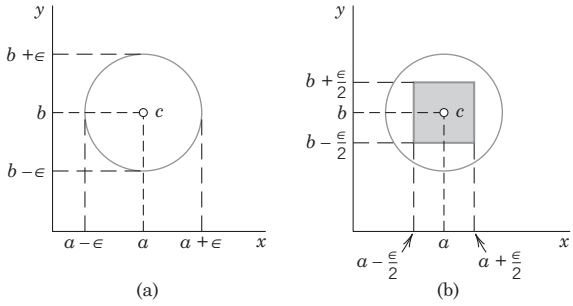


Fig. 360. Prova do Teorema 1

Inversamente, se $x_n \to a$ e $y_n \to b$ à medida que $n \to \infty$, então, para um dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher N tão grande que, para todo $n > N$,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Essas duas desigualdades implicam que $z_n = x_n + iy_n$ situa-se no interior de um quadrado de centro c e lado ϵ. Logo, z_n tem que se situar dentro de um círculo de raio ϵ com centro c (Fig. 360b). ■

Séries

Dada uma seqüência $z_1, z_2 \cdots, z_m, \cdots$ podemos formar a seqüência das somas

$$s_1 = z_1, \qquad s_2 = z_1 + z_2, \qquad s_3 = z_1 + z_2 + z_3, \quad \cdots$$

e, em geral,

(2) $$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

s_n é chamada de ***n*-ésima soma parcial** da *série infinita* ou **série**

(3) $$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \cdots.$$

Os $z_1, z_2 \cdots$ são chamados de **termos** da série. (Costumeiramente usamos a letra n para indicar a soma, a menos que precisemos de n para outro propósito, como neste exemplo, onde então usamos m para indicar a soma.)

Uma **série convergente** é aquela cuja seqüência de somas parciais converge, digamos,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s. \qquad \text{Escrevemos, então,} \qquad s = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \cdots$$

e dizemos que s é a **soma** ou o *valor* da série. Uma série que não é convergente é chamada de **divergente**.

Se, em (3), omitirmos os termos de s_n, sobrarão

(4) $$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \cdots.$$

Este é o chamado **resto** *da série* (3) *após o termo* z_n. Fica claro que se (3) converge e possui a soma s, então

$$s = s_n + R_n, \qquad \text{portanto,} \qquad R_n = s - s_n.$$

Agora, $s_n \to s$ pela definição de convergência; logo, $R_n \to 0$. Nas aplicações, quando s for desconhecida e calcularmos uma aproximação s_n de s, então $|R_n|$ é o erro e $R_n \to 0$ significa que podemos fazer $|R_n|$ tão pequeno quanto desejarmos, escolhendo um n suficientemente grande.

Uma aplicação do Teorema 1 às somas parciais estabelece uma relação direta entre a convergência de uma série complexa e a convergência das duas séries que compõem suas partes reais e imaginárias:

TEOREMA 2 **Partes Reais e Imaginárias**

Uma série (3) *com* $z_m = x_m + iy_m$ *converge e possui a soma* $s = u + iv$ *se e somente se* $x_1 + x_2 + \cdots$ *convergir e tiver a soma* u *e se* $y_1 + y_2 + \cdots$ *convergir e tiver a soma* v.

Testes para a Convergência e Divergência de Séries

Os **testes de convergência** no caso complexo são praticamente os mesmos do cálculo. Aplicamo-los antes de usar uma série, para nos certificarmos de que a série converge.

Freqüentemente é muito simples demonstrar os casos de divergência, do seguinte modo.

TEOREMA 3 **Divergência**

Se uma série $z_1 + z_2 + \cdots$ *converge, então* $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$. *Logo, caso isso não se verifique, a série diverge.*

PROVA Se $z_1 + z_2 + \cdots$ converge, com a soma s, então, como $z_m = s_m - s_{m-1}$,

$$\lim_{m\to\infty} z_m = \lim_{m\to\infty} (s_m - s_{m-1}) = \lim_{m\to\infty} s_m - \lim_{m\to\infty} s_{m-1} = s - s = 0. \qquad \blacksquare$$

CUIDADO! Para haver convergência, $z_m \to 0$ é *necessário*, porém *não suficiente*, como se pode ver pela série harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, que satisfaz a essa condição porém diverge, conforme se demonstra no cálculo (veja, por exemplo, a Ref. [RG11] no Apêndice. 1).

A dificuldade prática em provar a convergência reside no fato de que, na maioria dos casos, não se conhece o valor da soma de uma série. Cauchy superou esse problema mostrando que uma série converge se e somente se suas somas parciais terminam por se aproximar umas das outras:

TEOREMA 4 **Princípio de Cauchy para a Convergência de Séries**

Uma série $z_1 + z_2 + \cdots$ *é convergente se e somente se para cada* $\epsilon > 0$ *dado (não importando quão pequeno) é possível encontrar um N (que, em geral, depende de* ϵ*) tal que*

(5) $$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \epsilon \quad \text{para todo } n > N \text{ e } p = 1, 2, \cdots$$

A prova disso, algo complicada, é deixada como opcional (veja o Apêndice 4).

Convergência Absoluta. Uma série $z_1 + z_2 + \cdots$ é chamada de **absolutamente convergente** se a série dos valores absolutos dos termos

$$\sum_{m=1}^{\infty} |z_m| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

for convergente.

Se $z_1 + z_2 + \cdots$ converge, mas $|z_1| + |z_2| + \cdots$ diverge, então, de modo mais preciso se diz que a série $z_1 + z_2 + \cdots$ é **condicionalmente convergente**.

EXEMPLO 3 Uma Série Condicionalmente Convergente

A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$ converge, mas de modo apenas condicional, visto que a série harmônica diverge, como mencionamos anteriormente (após o Teorema 3). ■

Se uma série for absolutamente convergente, logo ela é convergente.

Isso decorre diretamente do princípio de Cauchy (veja o Projeto de Equipe 30). Esse princípio também fornece o seguinte teste geral de convergência.

TEOREMA 5 Teste da Comparação

Se uma série $z_1 + z_2 + \cdots$ for dada e pudermos encontrar uma série convergente $b_1 + b_2 + \cdots$ com termos reais não-negativos tais que $|z_1| \leqq b_1$, $|z_2| \leqq b_2$, $\cdots$, então a série dada converge, inclusive de modo absoluto.

PROVA Pelo princípio de Cauchy, uma vez que $b_1 + b_2 + \cdots$ converge, para um $\epsilon > 0$ qualquer dado podemos encontrar um N tal que

$$b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N \text{ e } p = 1, 2, \cdots.$$

Disso e de $|z_1| \leqq b_1$, $|z_2| \leqq b_2$, $\cdots$, concluímos que, para esses n e p,

$$|z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+p}| \leqq b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \epsilon.$$

Logo, novamente pelo princípio de Cauchy, $|z_1| + |z_2| + \cdots$ converge, de modo que $z_1 + z_2 + \cdots$ é absolutamente convergente. ■

Para servir de comparação, uma boa série é a geométrica, que se comporta do seguinte modo.

TEOREMA 6 Série Geométrica

*A **série geométrica***

(6*)
$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots$$

converge com a soma $1/(1 - q)$ se $|q| < 1$ e diverge se $|q| \geqq 1$.

PROVA Se $|q| \geqq 1$, then $|q^m| \geqq 1$, o que implica divergência pelo Teorema 3.

Agora, consideremos $|q| < 1$. A n-ésima soma parcial é

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n.$$

Disso,

$$qs_n = \qquad q + \cdots + q^n + q^{n+1}.$$

Na subtração, a maioria dos termos no lado direito cancelam-se aos pares, de modo que ficamos com

$$s_n - qs_n = (1 - q)s_n = 1 - q^{n+1}.$$

Agora, $1 - q \neq 0$, visto que $q \neq 1$, e é possível achar a solução de s_n, dada por

(6)
$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

Como $|q| < 1$, o último termo se aproxima de zero à medida que $n \to \infty$. Logo, se $|q| < 1$, a série converge e possui a soma $1/(1 - q)$. Isso completa a prova. ■

Teste da Razão

Este é o teste mais importante para a discussão que teremos a seguir. Ele é feito tomando-se a série geométrica como a série de comparação $b_1 + b_2 + \cdots$ no Teorema 5:

TEOREMA 7

Teste da Razão

Se uma série $z_1 + z_2 + \cdots$ com $z_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ tem a propriedade segundo a qual para todo n maior que algum N,

(7)
$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leqq q < 1 \qquad (n > N)$$

(onde $q < 1$ é fixo), então essa série é absolutamente convergente. Se, para todo $n > N$,

(8)
$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geqq 1 \qquad (n > N),$$

então a série é divergente.

PROVA Se (8) se verifica, então $|z_{n+1}| \geqq |z_n|$ para $n > N$, de modo que a convergência da série decorre do Teorema 3.

Se (7) se verifica, então $|z_{n+1}| \leqq |z_n|\, q$ para $n > N$, em particular,

$$|z_{N+2}| \leqq |z_{N+1}|q, \qquad |z_{N+3}| \leqq |z_{N+2}|q \leqq |z_{N+1}|q^2, \qquad \text{etc.},$$

e, em geral, $|z_{N+p}| \leqq |z_{N+1}|q^{p-1}$. Como $q < 1$, obtemos disso e do Teorema 6,

$$|z_{N+1}| + |z_{N+2}| + |z_{N+3}| + \cdots \leqq |z_{N+1}|\,(1 + q + q^2 + \cdots) \leqq |z_{N+1}|\,\frac{1}{1 - q}.$$

A convergência absoluta de $z_1 + z_2 + \cdots$ decorre agora do Teorema 5. ■

CUIDADO! A desigualdade (7) implica que $|z_{n+1}/z_n| < 1$, porém isso ***não*** implica convergência, como se pode ver com a série harmônica que satisfaz a $z_{n+1}/z_n = n/(n + 1) < 1$, para todo n, embora seja divergente.

Se a seqüência das razões em (7) e (8) converge, temos o mais conveniente

TEOREMA 8

Teste da Razão

Se uma série $z_1 + z_2 + \cdots$ com $z_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ for tal que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$, então:

(a) *se $L < 1$, a série é absolutamente convergente.*

(b) *se $L > 1$, a série é divergente.*

(c) *se $L = 1$, a série pode convergir ou divergir, de modo que o teste falha, não nos permitindo tirar conclusões.*

PROVA **(a)** Escrevamos $k_n = |z_{n+1}/z_n|$ e façamos $L = 1 - b < 1$. Então, pela definição de limite, é preciso que os k_n terminem por se aproximar de $1 - b$, digamos, $k_n \leqq q = 1 - \frac{1}{2}b < 1$ para todo n maior que algum N. A convergência de $z_1 + z_2 + \cdots$ agora decorre do Teorema 7.

(b) Similarmente, para $L = 1 + c > 1$, temos $k_n \geqq 1 + \frac{1}{2}c > 1$ para todo $n > N^*$ (suficientemente grande), o que implica a divergência de $z_1 + z_2 + \cdots$ pelo Teorema 7.

(c) A série harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ tem $z_{n+1}/z_n = n/(n + 1)$, logo, $L = 1$, e diverge. A série

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots \qquad \text{tem} \qquad \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

logo, também $L = 1$, porém converge. A convergência decorre de (Fig. 361)

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n},$$

de modo que $s_1, s_2 \cdots$ é uma seqüência limitada e monotonamente crescente (visto que os termos da série são todos positivos); as duas propriedades juntas são suficientes para a convergência da seqüência real $s_1, s_2 \cdots$ (No cálculo, isso se prova através do chamado *teste da integral*, cuja idéia utilizamos.) ■

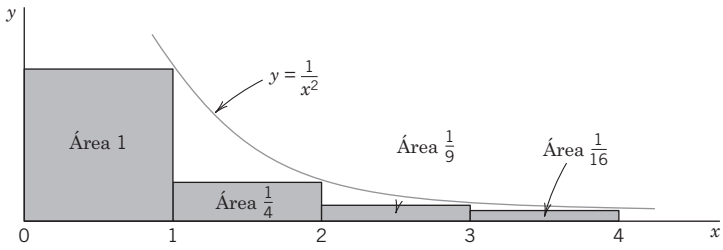


Fig. 361. Convergência da série $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$

EXEMPLO 4 **Teste da Razão**

A série a seguir é convergente ou divergente? (Responda primeiro por palpite, para depois fazer os cálculos.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100 + 75i)^n}{n!} = 1 + (100 + 75i) + \frac{1}{2!}(100 + 75i)^2 + \cdots$$

Solução. Pelo Teorema 8, a série converge, visto que

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{|100 + 75i|^{n+1}/(n+1)!}{|100 + 75i|^n/n!} = \frac{|100 + 75i|}{n+1} = \frac{125}{n+1} \qquad \to \qquad L = 0.$$ ■

EXEMPLO 5 **Teorema 7 É Mais Geral que o Teorema 8**

Consideremos $a_n = i/2^{3n}$ e $b_n = 1/2^{3n+1}$. A série a seguir é convergente ou divergente?

$$a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \cdots = i + \frac{1}{2} + \frac{i}{8} + \frac{1}{16} + \frac{i}{64} + \frac{1}{128} + \cdots$$

Solução. As razões dos valores absolutos dos termos sucessivos são $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$. Logo, a convergência decorre do Teorema 7. Visto que a seqüência dessas razões não possui limite, o Teorema 8 não é aplicável. ■

Teste da Raiz

O teste da razão e o teste da raiz são os dois de maior importância prática. O teste da razão é usualmente mais simples, porém o teste da raiz é algo mais geral.

TEOREMA 9 **Teste da Raiz**

Se uma série $z_1 + z_2 + \cdots$ for tal que para todo n maior que algum N,

(9) $$\sqrt[n]{|z_n|} \leqq q < 1 \qquad (n > N)$$

(onde $q < 1$ é fixo), essa série é absolutamente convergente. Se para um número infinito de n,

(10) $$\sqrt[n]{|z_n|} \geqq 1,$$

a série diverge.

PROVA Se (9) se verifica, então $|z_n| \leqq q^n < 1$ para todo $n > N$. Logo, a série $|z_1| + |z_2| + \cdots$ converge pela comparação com a série geométrica, de modo que a série $z_1 + z_2 + \cdots$ é absolutamente convergente. Se (10) se verifica, então $|z_n| \geqq 1$ para um número infinito de n's. A divergência de $z_1 + z_2 + \cdots$ decorre agora do Teorema 3. ■

CUIDADO! A Equação (9) implica que $\sqrt[n]{|z_n|} < 1$, porém isso não implica convergência, como se pode ver na série harmônica, que satisfaz a $\sqrt[n]{1/n} < 1$ (para $n > 1$), porém diverge.

Se, em (9) e (10), a seqüência das raízes convergir, temos, de modo mais conveniente, o

TEOREMA 10 **Teste da Raiz**

Se uma série $z_1 + z_2 + \cdots$ *for tal que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$, *então:*

(a) *A série converge absolutamente se* $L < 1$.

(b) *A série diverge se* $L > 1$.

(c) *Se* $L = 1$, *o teste falha; ou seja, não é possível tirar qualquer conclusão.*

PROVA A prova é semelhante à do Teorema 8.

(a) Consideremos que $L = 1 - a^* < 1$. Então, pela definição de limite, temos $\sqrt[n]{|z_n|} < q = 1 - \frac{1}{2}a^* < 1$ para todo n maior que algum N^* (suficientemente grande). Logo, $|z_n| < q^n < 1$ para todo $n > N^*$. A convergência absoluta da série $z_1 + z_2 + \cdots$ agora decorre pela comparação com a série geométrica.

(b) Se $L > 1$, então temos também que $\sqrt[n]{|z_n|} > 1$ para todo n suficientemente grande. Logo, $|z_n| > 1$ para esses valores de n. O Teorema 3 agora implica que $z_1 + z_2 + \cdots$ diverge.

(c) Tanto a série harmônica *divergente* quanto a série *convergente* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$ fornecem $L = 1$. Pode-se ver isso de $(\ln n)/n \to 0$ e de

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{e^{(1/n)\ln n}} \to \frac{1}{e^0}, \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{2/n}} = \frac{1}{e^{(2/n)\ln n}} \to \frac{1}{e^0}.$$

■

PROBLEMAS PROPOSTOS 15.1

1–10 SEQÜÊNCIAS

As seqüências $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ a seguir são limitadas? Convergentes? Encontre seus pontos-limite. (Mostre os detalhes do que fizer.)

1. $z_n = (-1)^n + i/2^n$

2. $z_n = e^{-n\pi i/4}$

3. $z_n = (-1)^n/(n + i)$

4. $z_n = (1 + i)^n$

5. $z_n = \text{Ln}\,((2 + i)^n)$

6. $z_n = (3 + 4i)^n/n!$

7. $z_n = \text{sen}\,(n\pi/4) + i^n$

8. $z_n = \left[(1 + 3i)/\sqrt{10}\right]^n$

9. $z_n = (0{,}9 + 0{,}1i)^{2n}$

10. $z_n = (5 + 5i)^{-n}$

11. Ilustre o Teorema 1 com um exemplo de sua escolha.

12. **(Unicidade do limite)** Mostre que, se uma seqüência converge, seu limite é único.

13. **(Adição)** Se $z_1, z_2 \cdots$ converge com o limite l e $z_1^*, z_2^*, \cdots$ converge com o limite l^*, mostre que $z_1 + z_1^*, z_2 + z_2^*, \cdots$ converge com o limite $l + l^*$.

14. **(Multiplicação)** Mostre que, vigorando as suposições do Problema 13, a seqüência $z_1z_1^*, z_2z_2^*, \cdots$ converge com o limite ll^*.

15. **(Existência de limite)** Mostre que uma seqüência complexa é limitada se e somente se as duas seqüências correspondentes das partes reais e das partes imaginárias são limitadas.

16–24 SÉRIES

As séries a seguir são convergentes ou divergentes? (Justifique.)

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10 - 15i)^n}{n!}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(1 + 2i)^{2n+1}}{(2n + 1)!}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 - 2i}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}(1 + i)^n$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n - i}{3n + 2i}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{i}{3}\right)^n$

25. Qual é a diferença entre (7) e simplesmente estabelecer-se que $|z_{n+1}/z_n| < 1$?

26. Ilustre o Teorema 2 com um exemplo de sua escolha.

27. No Exemplo 4, para qual n obtemos o termo de maior valor absoluto da série? Qual o valor aproximado de seu módulo? Responda primeiro por palpite e depois faça o cálculo pela fórmula de Stirling na Seção 24.4.

28. Dê um outro exemplo mostrando que o Teorema 7 é mais geral que o Teorema 8.

29. **PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Seqüências e Séries. (a)** Escreva um programa para fazer gráficos de **seqüências** complexas. Aplique-o a seqüências de sua escolha que possuam propriedades "geométricas" interessantes (p. ex., situando-se sobre uma elipse, espiralando na direção de seu limite etc.).

(b) Escreva um programa para calcular e representar graficamente os valores numéricos das n primeiras somas parciais de uma **série** de números complexos. Utilize esse programa para fazer experiências sobre a rapidez de convergência de séries de sua escolha.

30. **PROJETO DE EQUIPE. Série. (a) Convergência absoluta.** Mostre que, se uma série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

(b) Escreva um breve relatório sobre os conceitos e as propriedades básicas das séries de números, explicando em cada caso se eles são ou não uma extensão das séries reais (discutidas no cálculo) para as séries complexas, justificando.

(c) Estimativa do resto. Considere que $|z_{n+1}/z_n| \leqq q < 1$, de modo que a série $z_1 + z_2 + \cdots$ converge segundo o teste da razão. Mostre que o resto $R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots$ satisfaz a desigualdade $|R_n| \leqq |z_{n+1}|/(1 - q)$.

(d) Utilizando (c), encontre quantos termos são suficientes para se calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + i}{2^n n}$$

com um erro que não exceda 0,05, e calcule s para essa acurácia.

(e) Encontre outras aplicações da estimativa em (c).

15.2 Séries de Potências

As séries de potências são as séries mais importantes da análise complexa, pois veremos que suas somas são funções analíticas e que toda função analítica pode ser representada por uma série de potências (Teorema 5 da Seção 15.3 e Teorema 1 da Seção 15.4).

Uma **série de potências**, dada em *potências* de $z - z_0$, é uma série da forma

$$\textbf{(1)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

onde z é uma variável complexa, a_0, a_1 $\cdots$ são constantes complexas (ou reais), chamadas de **coeficientes** da série, e z_0 é uma constante complexa (ou real), chamada de **centro** da série. Isso é uma generalização das séries de potências reais vistas no cálculo.

Se $z_0 = 0$, obtemos como um caso particular de uma *série de potências de z*:

$$\textbf{(2)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots.$$

Comportamento de Convergência das Séries de Potências

As séries de potências possuem termos variáveis (funções de z), porém, ***se fixarmos z, então todos os conceitos para as séries de termos constantes vistas na última seção se aplicam***. Usualmente, uma série com termos variáveis convergirá para alguns valores de z e divergirá para outros. Para uma série de potências, a situação é simples. A série (1) pode convergir num disco com centro z_0, ou em todo o plano z, ou somente em z_0. Ilustraremos isso com exemplos típicos, para os quais logo depois forneceremos provas.

EXEMPLO 1 Convergência num Disco. Série Geométrica

A *série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

é absolutamente convergente se $|z| < 1$ e diverge se $|z| \geqq 1$ (veja o Teorema 6 da Seção 15.1). ■

EXEMPLO 2 Convergência para Todo *z*

A série de potências (que será a série de Maclaurin de e^z na Seção 15.4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

é absolutamente convergente para todo z. Com efeito, pelo teste da razão, para um valor qualquer fixo de z,

$$\left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \quad \to \quad 0 \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty.$$ ■

EXEMPLO 3 Convergência Somente no Centro. (Série sem Utilidade)

A seguinte série de potências converge somente em $z = 0$, porém diverge para qualquer $z \neq 0$, conforme mostraremos.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \cdots$$

Com efeito, do teste da razão, temos

$$\left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = (n+1)\,|z| \quad \to \quad \infty \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty \qquad (z \text{ fixo e} \neq 0).$$ ■

TEOREMA 1

Convergência de uma Série de Potências

(a) *Toda série de potências* (1) *converge no centro* z_0.
(b) *Se* (1) *converge num ponto* $z = z_1 \neq z_0$, *ela converge absolutamente para todo* z *mais próximo de* z_0 *do que* z_1, *ou seja*, $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Veja a Fig. 362.
(c) *Se* (1) diverge *num ponto* $z = z_2$, *ela divergirá para todo* z *mais distante de* z_0 *do que* z_2. Veja a Fig. 362.

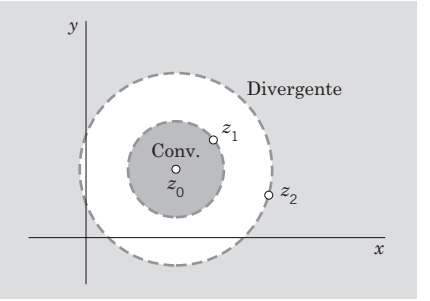


Fig. 362. Teorema 1

PROVA **(a)** Para $z = z_0$, a série se reduz ao termo único a_0.
(b) Pelo Teorema 3 da Seção 15.1, a convergência em $z = z_1$ fornece $a_n(z_1 - z_0)^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Isso implica a ocorrência de um limite em valores absolutos,

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| < M \qquad \text{para todo } n = 0, 1, \cdots.$$

Multiplicando e dividindo $a_n(z - z_0)^n$ por $(z_1 - z_0)^n$, obtemos disso,

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left|a_n(z_1 - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n\right| \leqq M \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n.$$

A soma em n fornece

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n| \leqq M \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n. \tag{3}$$

Agora, nossa suposição $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ implica que $|(z - z_0)/(z_1 - z_0)| < 1$. Logo, a série no lado direito de (3) é uma série geométrica convergente (veja o Teorema 6 da Seção 15.1). A convergência absoluta de (1), conforme enunciada em (b), agora se verifica pelo teste da comparação da Seção 15.1.
(c) Se isso fosse falso, teríamos convergência num ponto z_3 mais distante de z_0 do que z_2. Por (b), isso implicaria convergência em z_2, o que contradiz nossa suposição de divergência em z_2. ■

Raio de Convergência de uma Série de Potências

A convergência para todo z (o melhor caso, do Exemplo 2) ou para nenhum $z \neq z_0$ (o caso sem utilidade, do Exemplo 3) dispensa discussões adicionais, de modo que poremos esses casos à parte por um momento. Consideremos o ***menor*** círculo com um centro z_0 que inclui todos os pontos onde uma dada série de potências (1) converge. Chamemos seu raio de R. O círculo

$$|z - z_0| = R \qquad \text{(Fig. 363)}$$

é chamada de **círculo de convergência** e seu raio R é o **raio de convergência** de (1). Então, o Teorema 1 implica convergência em todos os lugares no interior desse círculo, ou seja, para todo z para o qual

$$|z - z_0| < R \tag{4}$$

(o disco aberto com centro z_0 e raio R). Além disso, uma vez que R é tão *pequeno* quanto possível, a série (1) diverge para todo z para o qual

$$|z - z_0| > R. \tag{5}$$

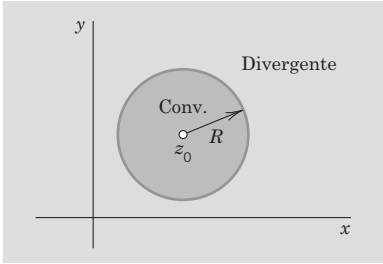


Fig. 363. Círculo de Convergência

Não é possível fazer declarações gerais a respeito da convergência de uma série de potências (1) ***sobre a circunferência de convergência*** em si mesma. A série (1) pode convergir em alguns desses pontos, em todos ou em nenhum. Os detalhes disso não são essenciais para nós. Logo, um simples exemplo pode servir para nos dar uma idéia.

EXEMPLO 4 Comportamento sobre a Circunferência de Convergência

Sobre a circunferência de convergência (raio $R = 1$ em todas as três séries),

$\Sigma\, z^n/n^2$ converge em todos os lugares, visto que $\Sigma\, 1/n^2$ converge,
$\Sigma\, z^n/n$ converge em –1 (segundo o teste de Leibniz), porém diverge em 1,
$\Sigma\, z^n$ diverge em todos os lugares. ■

Notações $R = \infty$ e $R = 0$. Para, na presente notação, incorporarmos esses dois casos excluídos, escrevemos

$R = \infty$ se a série (1) convergir para todo z (como no Exemplo 2),
$R = 0$ se (1) convergir somente no centro $z = z_0$ (como no Exemplo 3).

Essas são situações convenientes, porém nada mais do que isso.

Séries de Potências Reais. Neste caso, onde as potências, os coeficientes e o centro são reais, a fórmula (4) fornece o **intervalo de convergência** $|x - x_0| < R$ de comprimento $2R$ sobre a reta dos números reais.

Determinação do Raio de Convergência a partir dos Coeficientes. Para essa importante tarefa prática, podemos usar o

TEOREMA 2 Raio de Convergência *R*

Suponha que a seqüência $|a_{n+1}/a_n|$, $n = 1, 2, \cdots$ *convirja com o limite* L^*. *Se* $L^* = 0$, *então* $R = \infty$; *ou seja, a série de potências* (1) *converge para todo z. Se* $L^* \neq 0$ (*logo*, $L^* > 0$), *então*

(6)
$$R = \frac{1}{L^*} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \textbf{(fórmula de Cauchy-Hadamard[1]).}$$

Se $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, *então* $R = 0$ (*convergência somente no centro* z_0).

PROVA Para (1), no teste da razão (Seção 15.1), a razão dos termos é

$$\left|\frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z - z_0|. \qquad \text{O limite é} \qquad L = L^*|z - z_0|.$$

Consideremos que $L^* \neq 0$, portanto, $L^* > 0$. Temos convergência se $L = L^*|z - z_0| < 1$, portanto, $|z - z_0| < 1/L^*$ e divergência se $|z - z_0| > 1/L^*$. Usando (4) e (5), isso mostra que $1/L^*$ é o raio de convergência e prova (6).

Se $L^* = 0$, então $L = 0$ para todo z, o que implica convergência para todo z pelo teste da razão. Se $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, então $|a_{n+1}/a_n||z - z_0| > 1$ para qualquer $z \neq z_0$ e todo n suficientemente grande. Isso implica divergência para todo $z \neq z_0$ pelo teste da razão (Teorema 7 da Seção 15.1). ■

[1]Essa fórmula tem esse nome devido aos matemáticos franceses A. L. CAUCHY (veja a Seção 2.5) e JACQUES HADAMARD (1865–1963). Hadamard prestou contribuições fundamentais à teoria das séries de potências e devotou toda sua vida profissional ao estudo das equações diferenciais parciais.

A fórmula (6) não nos será útil se L^* não existir, porém ainda é possível aplicar as extensões do Teorema 2, conforme discutiremos no Exemplo 6 a seguir.

EXEMPLO 5 Raio de Convergência

Por (6), o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$ é

$$R = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\Big/\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

A série converge no disco aberto $|z-3i| < \frac{1}{4}$ de raio $\frac{1}{4}$ e centro $3i$. ■

EXEMPLO 6 Extensão do Teorema 2

Encontre o raio de convergência R da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n+\frac{1}{2^n}\right]z^n = 3+\frac{1}{2}z+\left(2+\frac{1}{4}\right)z^2+\frac{1}{8}z^3+\left(2+\frac{1}{16}\right)z^4+\cdots.$$

Solução. A seqüência das razões 1/6, $2(2+\frac{1}{4})$, $1/(8(2+\frac{1}{4}))$, $\cdots$ não converge, de modo que o Teorema 2 não tem qualquer utilidade. Pode-se mostrar que

$$(6^*) \qquad R = 1/\tilde{L}, \qquad \tilde{L} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tampouco isso ajuda aqui, visto que $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ não converge pois $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{1/2^n} = 1/2$ para n ímpar, ao passo que, para n par, temos

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2+1/2^n} \to 1 \quad \text{quando} \quad n\to\infty,$$

de modo que $\sqrt[n]{|a_n|}$ possui os dois pontos-limite 1/2 e 1. Também se pode mostrar que

$$(6^{**}) \qquad R = 1/\tilde{l}, \qquad \tilde{l} \text{ é o maior ponto-limite da seqüência } \left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}.$$

Aqui, $\tilde{l} = 1$, de modo que $R = 1$. *Resposta*. A série converge para $|z| < 1$. ■

Resumo. As séries de potências convergem num disco circular aberto, chegando algumas delas a convergir para todo z (e outras somente no centro, porém, neste caso, elas não têm utilidade); quanto ao raio de convergência, veja (6) ou o Exemplo 6.

Excetuando-se os casos sem utilidade, as séries de potências possuem somas que são funções analíticas (conforme mostraremos na próxima seção); isso testemunha sua importância na análise complexa.

PROBLEMAS PROPOSTOS 15.2

1. **(Potências faltando)** Mostre que se $\Sigma a_n z^n$ tem um raio de convergência R (suposto ser finito) então $\Sigma a_n z^{2n}$ possui um raio de convergência $\sqrt{R}$. Dê exemplos.
2. **(Comportamento de convergência)** Ilustre os fatos mostrados nos Exemplos 1-3, fornecendo ainda outros exemplos que você mesmo conceber.

3–18 RAIO DE CONVERGÊNCIA

Encontre o centro e o raio de convergência das seguintes séries de potências. (Mostre os detalhes.)

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^2}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(z+2i)^n$
5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(z+1)^n$
6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{100n}}{n!}z^n$
7. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n z^n$
8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty}(n-i)^n z^n$
10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$
12. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(1+i)^n}(z-5)^n$
13. $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(z-3+2i)^n$
14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-i)^{4n}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+3i}{5-i}\right)^n(z-\pi)^n$
17. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}z^{2n}$
18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{2^n(n!)^4}(z+\pi i)^n$
19. **PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Raio de Convergência.** Escreva um programa para calcular R a partir de (6), (6*) ou (6**), nesta ordem, dependendo da existência dos limites necessários. Teste o programa com séries de sua escolha e que sejam tais que possibilitem empregar todas as três fórmulas (6), (6*) e (6**).
20. **PROJETO DE EQUIPE. Raio de Convergência. (a)** A fórmula (6) para R contém $|a_n/a_{n+1}|$, e não $|a_{n+1}/a_n|$. Como seria possível memorizar isso usando-se um argumento qualitativo?

(b) Mudança dos coeficientes. O que acontece com R ($0 < R < \infty$) se (i) multiplicamos todos os a_n por $k \neq 0$, (ii) multiplicamos a_n por $k_n \neq 0$, (iii) subtituímos a_n por $1/a_n$?

(c) O **Exemplo 6** estende o Teorema 2 para os casos não-convergentes de a_n/a_{n+1}. Você consegue compreender o princípio da "mistura", pelo qual o Exemplo 6 foi obtido? Use esse princípio para imaginar exemplos adicionais.

(d) Existe uma série de potências de z que converge em $z = 30 + 10i$ e diverge em $z = 31 - 6i$? (Justifique.)

15.3 Funções Dadas por Séries de Potências

O principal objetivo desta seção é mostrar que as séries de potências representam as funções analíticas (Teorema 5). Ao fazermos isso, veremos que as séries de potências comportam-se bem nas operações de adição, multiplicação, derivação e integração, o que as torna muito úteis em análise complexa.

Para simplificarmos as fórmulas desta seção, consideraremos $z_0 = 0$ e escreveremos

$$\textbf{(1)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Isso não implica qualquer restrição, pois uma série de potências de $\hat{z} - z_0$ com um z_0 qualquer pode sempre ser reduzida à forma (1) se fizermos $\hat{z} - z_0 = z$.

Terminologia e Notação. Se uma série qualquer dada de potências (1) tem um raio de convergência não-nulo R (logo, $R > 0$), sua soma é uma função de z, digamos $f(z)$. Então, escrevemos

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R).$$

Dizemos que $f(z)$ é **representada** *pela série de potências*, ou que *ela é* **desenvolvida** *na série de potências*. Por exemplo, a série geométrica *representa* a função $f(z) = 1/(1 - z)$ no anterior do círculo unitário $|z| = 1$. (Veja o Teorema 6 da Seção 15.1.)

Unicidade de uma Representação por Séries de Potências. Esta é a nossa próxima meta e significa que *uma função $f(z)$ não pode ser representada por duas diferentes séries de potências com o mesmo centro*. Afirmamos que, se é possível expandir $f(z)$ por meio de uma série de potências de centro z_0, essa expansão é única. Esse importante fato é freqüentemente utilizado em análise complexa (bem como no cálculo). Prova-lo-emos no Teorema 2. A prova decorrerá do

TEOREMA 1

Continuidade da Soma de uma Série de Potências

Se uma função $f(z)$ pode ser representada por uma série de potências (2) *com um raio de convergência $R > 0$, então $f(z)$ é contínua em $z = 0$.*

PROVA De (2), com $z = 0$, temos que $f(0) = a_0$. Logo, pela definição de continuidade, precisamos demonstrar que $\lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = a_0$. Ou seja, precisamos demonstrar que, para um dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|z| < \delta$ implica $|f(z) - a_0| < \epsilon$. Agora, (2) converge absolutamente para $|z| \leqq r$ com um r qualquer tal que $0 < r < R$, pelo Teorema 1 da Seção 15.2. Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$$

converge. Consideremos que $S \neq 0$ seja sua soma. ($S = 0$ é trivial.) Então, para $0 < |z| \leqq r$,

$$|f(z) - a_0| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right| \leqq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, |z|^{n-1} \leqq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = |z| S$$

e $|z|S < \epsilon$ quando $|z| < \delta$ onde $\delta > 0$ é menor que r e menor que ϵ/S. Logo, $|z|S < \delta S < (\epsilon/S)S = \epsilon$. Isso prova o teorema. ■

Deste teorema, podemos agora rapidamente obter o desejado teorema da unicidade (de novo supondo que $z_0 = 0$, sem perda de generalidade):

TEOREMA 2

Teorema da Identidade para Séries de Potências. Unicidade

Consideremos que as séries de potências $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots$ *e* $b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots$ *sejam ambas convergentes para* $|z| < R$*, onde* R *é positivo, e também admitamos que ambas tenham a mesma soma para todos esses valores de* z*. Então, as duas séries são idênticas, ou seja,* $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\cdots$.

Logo, se uma função $f(z)$ *pode ser representada por uma série de potências com um centro qualquer* z_0*, essa representação é* ***única****.*

PROVA Demonstraremos isso por indução. Por suposição,

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots \qquad (|z| < R).$$

Pelo Teorema 1, as somas dessas duas séries de potências são contínuas em $z = 0$. Logo, se considerarmos $|z| > 0$ e fizermos $z \to 0$ em ambos os lados, veremos que $a_0 = b_0$: a asserção é verdadeira para $n = 0$. Agora, suponhamos que $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, \cdots, m$. Então, em ambos os lados podemos omitir os termos que são iguais e dividir o resultado por z^{m+1} $(\neq 0)$; isso fornece

$$a_{m+1} + a_{m+2}z + a_{m+3}z^2 + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2}z + b_{m+3}z^2 + \cdots.$$

Similarmente como antes, fazendo $z \to 0$, concluímos disso que $a_{m+1} = b_{m+1}$. Isso completa a prova. ■

Operações com Séries de Potências

Esta discussão, que é interessante por si mesma, servirá como uma preparação para nosso objetivo principal, a saber, mostrar que as funções representadas por séries de potências são analíticas.

A **adição ou a subtração termo a termo** de duas séries de potências com raios de convergência R_1 e R_2 fornece uma série de potências com um raio de convergência que seja pelo menos igual ao menor dos raios R_1 e R_2. *Prova.* Some (ou subtraia) termo a termo as somas parciais s_n e s_n^* e utilize $\lim (s_n \pm s_n^*) = \lim s_n \pm \lim s_n^*$.

A **multiplicação termo a termo** das duas séries de potências

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1z + \cdots$$

e

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = b_0 + b_1z + \cdots$$

corresponde à multiplicação de cada termo da primeira série por cada termo da segunda série, com o agrupamento das potências iguais de z. Isso fornece uma série de potências, chamada de **produto de Cauchy** das duas séries, que é dada por

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)z^n.$$

Mencionaremos sem provar que essa série de potências converge absolutamente para cada z situado no interior do círculo de convergência de cada uma das duas séries dadas e possui a soma $s(z) = f(z)g(z)$. Uma prova disso pode ser vista em [D5] do Apêndice 1.

É possível fazer **a derivação e a integração termo a termo** das séries de potências, como mostraremos a seguir. Chamamos de **série derivada** *da série de potências* (1) a série de potências obtida a partir de (1) por meio de derivação termo a termo, ou seja,

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nz^{n-1} = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \cdots.$$

TEOREMA 3

Derivação Termo a Termo de uma Série de Potências

A série derivada de uma série de potências possui o mesmo raio de convergência da série original.

PROVA A prova decorre de (6) da Seção 15.2, visto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n|a_n|}{(n+1)\,|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ou, se o limite não existir, de (6**) da Seção 15.2, e notando que $\sqrt[n]{n} \to 1$ quando $n \to \infty$. ■

EXEMPLO 1 Aplicação do Teorema 3

Aplicando o Teorema 3, encontre o raio de convergência R da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} z^n = z^2 + 3z^3 + 6z^4 + 10z^5 + \cdots.$$

Solução. Derive duas vezes termo a termo a série geométrica e multiplique o resultado por $z^2/2$. Isso fornecerá a série dada. Logo, $R = 1$ pelo Teorema 3. ■

TEOREMA 4 Integração Termo a Termo de Séries de Potências

A série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \cdots$$

obtida pela integração termo a termo da série $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ possui o mesmo raio de convergência da série original.

A prova é similar à do Teorema 3.

Usando o Teorema 3 como nossa ferramenta, temos agora condições de enunciar o principal resultado desta seção.

Séries de Potências Representam as Funções Analíticas

TEOREMA 5 Funções Analíticas e Suas Derivadas

Uma série de potências com um raio de convergência R não-nulo representa uma função analítica em cada ponto no interior de seu círculo de convergência. As derivadas desta função são obtidas derivando-se termo a termo a série original. Todas as séries assim obtidas possuem o mesmo raio de convergência da série original. Logo, conforme o que se enunciou inicialmente, cada uma delas representa uma função analítica.

PROVA **(a)** Consideremos uma série de potências qualquer (1) com um raio positivo de convergência R. Consideremos também que $f(z)$ seja sua soma e $f_1(z)$ seja a soma de sua série derivada; portanto,

$$(4) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{e} \qquad f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Mostremos que $f(z)$ é analítica e que possui a derivada $f_1(z)$ no interior do círculo de convergência. Isso é feito provando-se que, para um z fixo qualquer com $|z| < R$ e $\Delta z \to 0$, o quociente da diferença $[f(z + \Delta z) - f(z)]/\Delta z$ aproxima-se de $f_1(z)$. Por adição termo a termo, temos primeiro de (4),

$$(5) \qquad \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - n z^{n-1}\right].$$

Observe que a soma começa com 2, visto que o termo constante é eliminado ao considerarmos a diferença $f(z + \Delta z) - f(z)$, o mesmo ocorrendo com o termo linear quando subtraímos $f_1(z)$ do quociente da diferença.

(b) Dizemos que a série em (5) pode ser escrita como

$$(6) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} a_n \Delta z[(z+\Delta z)^{n-2} + 2z(z+\Delta z)^{n-3} + \cdots + (n-2)z^{n-3}(z+\Delta z) + (n-1)z^{n-2}].$$

A prova disso, algo técnica, é fornecida no Apêndice 4.

(c) Consideremos (6). Os colchetes contêm $n - 1$ termos e o maior coeficiente é $n - 1$. Como $(n - 1)^2 \leqq n(n - 1)$, vemos que, para $|z| \leqq R_0$ e $|z + \Delta z| \leqq R_0$, $R_0 < R$, o valor absoluto dessa série (6) não pode exceder

$$|\Delta z| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1) R_0^{n-2}. \tag{7}$$

Esta série que tem a_n no lugar de $|a_n|$ é a segunda série derivada de (2) em $z = R$ e converge absolutamente segundo o Teorema 3 desta seção e o Teorema 1 da Seção 15.2. Logo, a série (7) que agora temos converge. Consideremos que a soma de (7) (sem o fator $|\Delta z|$) seja $K(R_0)$. Como (6) é o lado direito de (5), o resultado que agora temos é

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) \right| \leqq |\Delta z| \, K(R_0).$$

Fazendo $\Delta z \to 0$ e notando que R_0 ($< R$) é arbitrário, concluímos que $f(z)$ é analítica em qualquer ponto no interior do círculo de convergência e sua derivada é representada pela série derivada. Disso, por indução, é possível fazer afirmativas semelhantes para as derivadas de ordem superior. ■

Resumo. Os resultados desta seção mostram que as séries de potências têm o melhor comportamento que poderíamos esperar: é possível derivá-las e integrá-las termo a termo (Teoremas 3 e 4). O Teorema 5 evidencia a grande importância das séries de potências na análise complexa: a soma de uma série desse tipo (com um raio positivo de convergência) é uma função analítica e possui derivadas de todas as ordens, as quais, por sua vez, são, portanto, funções analíticas. Mas isso não é tudo. Na próxima seção, mostraremos que, inversamente, é possível representar toda função analítica $f(z)$ por séries de potências, que são chamadas de **séries de Taylor** e que constituem uma analogia complexa às séries de Taylor reais encontradas no cálculo.

PROBLEMAS PROPOSTOS 15.3

1–10 *RAIO DE CONVERGÊNCIA POR DERIVAÇÃO OU INTEGRAÇÃO

Encontre o raio de convergência de duas maneiras: (a) diretamente pela fórmula de Cauchy-Hadamard na Seção 15.2 e (b) de uma série de termos mais simples, utilizando o Teorema 3 ou o Teorema 4.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} (z - 2i)^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(n+1)} z^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (z + i)^{2n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n(n+1)}{5^n} (z - 1)^{2n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{4}\right)^n$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{n(n+1)(n+2)} z^{2n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)}{n^n} z^{2n-2}$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k}\right]^{-1} z^{n+k}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} z^n$

11. (Adição e subtração) Escreva os detalhes da prova da adição e da subtração termo a termo das séries de potências.

12. (Produto de Cauchy) Mostre que $(1 - z)^{-2} = \Sigma_{n=0}^{\infty} (n + 1) z^n$ (a) utilizando o produto de Cauchy e (b) derivando uma série adequada.

13. (Produto de Cauchy) Mostre que o produto de Cauchy de $\Sigma_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ multiplicado por si mesmo fornece $\Sigma_{n=0}^{\infty} (2z)^n/n!$.

14. (Sobre o Teorema 3) Prove que $\sqrt[n]{n} \to 1$ quando $n \to \infty$ (conforme se enunciou na prova do Teorema 3).

15. (Sobre os Teoremas 3 e 4) Encontre outros exemplos de sua própria escolha.

16–20 APLICAÇÕES DO TEOREMA DA IDENTIDADE

Enuncie de forma clara e explícita onde e como você está utilizando o Teorema 2.

16. (Coeficientes binomiais) Usando $(1 + z)^p (1 + z)^q = (1 + z)^{p+q}$, obtenha a relação básica

$$\sum_{n=0}^{r} \binom{p}{n} \binom{q}{r-n} = \binom{p+q}{r}.$$

17. (Função ímpar) Se, em (1), $f(z)$ for *ímpar* (isto é, $f(-z) = -f(z)$), mostre que $a_n = 0$ para n par. Dê exemplos.

18. (Funções pares) Se, em (1), $f(z)$ for *par* (ou seja, $f(-z) = f(z)$), mostre que $a_n = 0$ para n ímpar. Dê exemplos.

19. Encontre aplicações do Teorema 2 nas equações diferenciais e em outras áreas.

20. PROJETO DE EQUIPE. Números de Fibonacci.[2] (a) Os números de Fibonacci são definidos de forma recursiva por $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ se $n = 1, 2, \cdots$. Obtenha o limite da seqüência (a_{n+1}/a_n).

(b) O problema do coelho de Fibonacci. Calcule uma lista de $a_1, a_2 \cdots$ Mostre que $a_{12} = 233$ é o número de casais de coelhos após 12 meses, se inicialmente houver um casal e cada casal gerar 1 casal por mês, começando no segundo mês de existência (e sem a ocorrência de mortes).

(c) Função geratriz. Mostre que a *função geratriz* dos **números de Fibonacci** é $f(z) = 1/(1 - z - z^2)$; ou seja, se uma série de potências (1) representa essa $f(z)$, seus coeficientes necessariamente são os números de Fibonacci, e vice-versa. *Sugestão*. comece com $f(z)\,(1 - z - z^2) = 1$ e utilize o Teorema 2.

[2] LEONARDO DE PISA, chamado de FIBONACCI (= filho de Bonaccio), cerca de 1180–1250, matemático italiano, a quem se credita o primeiro renascimento da matemática em terras cristãs.

15.4 Séries de Taylor e de Maclaurin

As **séries de Taylor**[3] de uma função $f(z)$, que é a análoga complexa da série de Taylor real, é

$$\textbf{(1)} \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

ou, por (1) da Seção 14.4,

$$\textbf{(2)} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} \, dz^*.$$

Em (2), integramos no sentido anti-horário em torno de um caminho fechado simples C que contenha z_0 em seu interior e que seja tal que $f(z)$ seja analítica num domínio contendo C e em todo ponto no interior de C.

Uma **série de Maclaurin**[3] é uma série de Taylor com o centro $z_0 = 0$.

O **resto** da série de Taylor (1), após o termo $a_n(z - z_0)^n$ é

$$\textbf{(3)} \qquad R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)} \, dz^*$$

(a prova é apresentada a seguir). Escrevendo a soma parcial correspondente de (1), temos, portanto,

$$\textbf{(4)} \qquad f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + R_n(z).$$

Esta é a chamada **fórmula de Taylor** *com resto*.

Vemos que ***as séries de Taylor são séries de potências***. Da última seção, sabemos que as séries de potências representam funções analíticas. Mostremos agora que *toda* função analítica pode ser representada por séries de potências, a saber, por séries de Taylor (com diversos centros). Isso dá às séries de Taylor uma importância muito grande na análise complexa. Com efeito, elas são mais fundamentais na análise complexa do que suas contrapartes reais o são no cálculo.

TEOREMA 1

Teorema de Taylor

Admitamos que $f(z)$ seja analítica num domínio D e consideremos que $z = z_0$ seja um ponto qualquer em D. Então, existe precisamente uma série de Taylor (1) *com centro em z_0 que representa $f(z)$. Essa representação é válida no maior disco aberto com centro z_0 no qual $f(z)$ é analítica. Os restos $R_n(z)$ de* (1) *podem ser representados na forma* (3). *Os coeficientes satisfazem à desigualdade*

$$\textbf{(5)} \qquad |a_n| \leqq \frac{M}{r^n}$$

onde M é o máximo de $|f(z)|$ sobre um círculo $|z - z_0| = r$ em D, cujo interior também está situado em D.

PROVA A ferramenta-chave é a fórmula da integral de Cauchy, vista na Seção 14.3; escrevendo z e z^* no lugar de z_0 e z (de modo que z^* é a variável de integração), temos

$$(6) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} \, dz^*.$$

z situa-se no interior de C, para o qual consideramos um círculo de raio r com um centro z_0 e interior a D (Fig. 364). Em (6), desenvolvemos $1/(z^* - z)$ em potências de $z - z_0$. Por uma ***manipulação algébrica padrão*** (que vale a pena lembrar!), temos primeiro

$$(7) \qquad \frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(z^* - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)}.$$

[3] BROOK TAYLOR (1685–1731), matemático inglês, a quem se deve a série de Taylor de números reais. COLIN MACLAURIN (1698–1746), matemático escocês e catedrático em Edimburgo.

Uma observação que usaremos depois é que, como z^* situa-se sobre C ao passo que z situa-se no interior de C, temos

$$\left|\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right| < 1 \qquad \text{(Fig. 364).} \tag{7*}$$

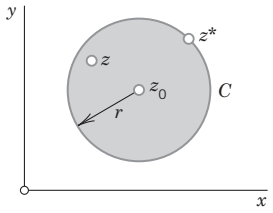


Fig. 364. Fórmula de Cauchy (6)

Em (7), aplicamos agora a fórmula para uma soma geométrica finita

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q} \qquad (q \neq 1), \tag{8*}$$

que usamos na forma (passando o último termo para o outro lado e invertendo os lados)

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + \cdots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}\,. \tag{8}$$

Aplicando isso com $q = (z - z_0)/(z^* - z_0)$ ao lado direito de (7), obtemos

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0}\left[1 + \frac{z - z_0}{z^* - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)^n\right] + \frac{1}{z^* - z}\left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)^{n+1}.$$

Inserimos essa expressão em (6). As potências de $z - z_0$ não dependem da variável de integração z^*, de modo que podemos retirá-las do sinal da integral. Isso fornece

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z_0}\,dz^* + \frac{z - z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^2}\,dz^* + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\,dz^* + R_n(z)$$

com $R_n(z)$ dado por (3). As integrais são as que aparecem em (2) relacionadas às derivadas, de modo que assim provamos a fórmula de Taylor (4).

Uma vez que as funções analíticas possuem derivadas de todas as ordens, podemos agora, em (4), considerar n tão grande quanto queiramos. Se fizermos n aproximar-se do infinito, obtemos (1). Fica claro que (1) convergirá e representará $f(z)$ se e somente se

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0. \tag{9}$$

Provaremos (9) do seguinte modo. Como z^* situa-se sobre C, ao passo que z se encontra no interior de C (Fig. 364), temos que $|z^* - z| > 0$. Como $f(z)$ é analítica no interior e sobre C ela é limitada, e o mesmo acontece com a função $f(z^*)/(z^* - z)$, digamos,

$$\left|\frac{f(z^*)}{z^* - z}\right| \leqq \widetilde{M}$$

para todo z^* sobre C. Além disso, C possui o raio $r = |z^* - z_0|$ e o comprimento $2\pi r$. Logo, pela desigualdade *ML* (Seção 14.1), obtemos de (3)

$$\begin{aligned} |R_n| &= \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)}\,dz^*\right| \\ &\leqq \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi}\,\widetilde{M}\,\frac{1}{r^{n+1}}\,2\pi r = \widetilde{M}\left|\frac{z - z_0}{r}\right|^{n+1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Agora, $|z - z_0| < r$, pois z está *dentro* de C. Portanto, $|z - z_0|/r < 1$, de modo que o lado direito aproxima-se de 0 à medida que $n \to \infty$. Isso prova a convergência da série de Taylor. A unicidade decorre do Teorema 2 da última seção. Finalmente, (5) decorre de (1) e da desigualdade de Cauchy vista na Seção 14.4. Isso prova o teorema de Taylor. ■

Acurácia da Aproximação. Na aproximação de $f(z)$ por uma soma parcial de (1), podemos atingir qualquer nível predeterminado de acurácia desde que escolhamos um n suficientemente grande. Este é o aspecto prático da fórmula (9).

Singularidade, Raio de Convergência. Sobre o círculo de convergência de (1), há pelo menos um **ponto singular** de $f(z)$, ou seja, um ponto $z = c$ onde $f(z)$ não é analítica (porém, tal que todo disco com centro c contém pontos nos quais $f(z)$ é analítica). Dizemos também que $f(z)$ é **singular** em c ou que **possui uma singularidade** em c. Logo, o raio de convergência R de (1) é usualmente igual à distância entre z_0 e ponto singular mais próximo de $f(z)$.

(Às vezes, R pode ser maior que essa distância: Ln z é singular sobre o eixo real negativo, cuja distância de $z_0 = -1 + i$ é 1, porém a série de Taylor de Ln z com centro $z_0 = -1 + i$ possui um raio de convergência de $\sqrt{2}$.)

Séries de Potências como Séries de Taylor

As séries de Taylor são séries de potências — naturalmente! Inversamente, temos o

TEOREMA 2 **Relação com a Última Seção**

Uma série de potências com um raio de convergência não-nulo é a série de Taylor de sua soma.

PROVA Dada a série de potências

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots .$$

Então, $f(z_0) = a_0$. Pelo Teorema 5 da Seção 15.3, obtemos

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots , \quad \text{portanto, } f'(z_0) = a_1$$
$$f''(z) = 2a_2 + 3 \cdot 2(z - z_0) + \cdots , \quad \text{portanto, } f''(z_0) = 2!\,a_2$$

e, em geral, $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$. Com esses coeficientes, a série dada torna-se a série de Taylor de $f(z)$ com centro em z_0. ■

Comparação com as Funções Reais. Uma propriedade surpreendente das funções analíticas complexas é que elas possuem derivadas de todas as ordens, e agora descobrimos uma outra propriedade surpreendente, pela qual elas podem ser sempre representadas por séries de potências da forma (1). Em geral, isso não é verdadeiro para as ***funções reais***; existem funções reais que possuem derivadas de todas as ordens, porém não podem ser representadas por uma série de potências. (Exemplo: $f(x) = \exp(-1/x^2)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$; essa função não pode ser representada por uma série de Maclaurin num disco aberto com centro 0, pois todas as suas derivadas em 0 são nulas.)

Séries de Taylor Especiais de Maior Importância

Estas são como as do cálculo, com a substituição de x pelo z complexo. Você consegue ver o motivo disso? (*Resposta*. As fórmulas dos coeficientes são as mesmas.)

EXEMPLO 1 **Série Geométrica**

Consideremos $f(z) = 1/(1 - z)$. Então, temos $f^{(n)}(z) = n!/(1 - z)^{n+1}$, $f^{(n)}(0) = n!$. Logo, a expansão de Maclaurin de $1/(1 - z)$ é a série geométrica

$$\textbf{(11)} \qquad \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

$f(z)$ é circular em $z = 1$; esse ponto está situado sobre a circunferência de convergência. ■

EXEMPLO 2 **Função Exponencial**

Sabemos que a função exponencial e^z (Seção 13.5) é analítica para todo z e que $(e^z)' = e^z$. Logo, de (1) com $z_0 = 0$, obtemos a série de Maclaurin

$$\textbf{(12)} \qquad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots .$$

Esta série também é obtida se substituirmos x por z na série de Maclaurin familiar de e^z.

Além disso, fazendo $z = iy$ em (12) e separando a série nas partes real e imaginária (veja o Teorema 2 da Seção 15.1), obtemos

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Como as séries no lado direito são as séries de Maclaurin familiares das funções reais cos y e sen y, isso mostra que redescobrimos a **fórmula de Euler**

(13)
$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Com efeito, podemos usar (12) para ***definir*** e^z e obter de (12) as propriedades básicas de e^z. Por exemplo, a fórmula de derivação $(e^z)' = e^z$ decorre diretamente de (12) por derivação termo a termo. ■

EXEMPLO 3 **Funções Trigonométricas e Hiperbólicas**

Substituindo (12) em (1) da Seção 13.6, obtemos

(14)
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots$$
$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots.$$

Quando $z = x$, estas são as familiares séries de Maclaurin das funções reais cos x e sen x. Similarmente, substituindo (12) em (11) da Seção 13.6, obtemos

(15)
$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$
$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots.$$ ■

EXEMPLO 4 **Logaritmo**

De (1), segue-se que

(16)
$$\operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

Substituindo z por $-z$ e multiplicando ambos os lados por -1, obtemos

(17)
$$-\operatorname{Ln}(1-z) = \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

Somando as duas séries, chegamos a

(18)
$$\operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \qquad (|z| < 1).$$ ■

Métodos Práticos

Os próximos exemplos mostram formas de obter séries de Taylor mais rapidamente do que pela utilização das fórmulas dos coeficientes. Independentemente do método utilizado, o resultado será o mesmo. Isso é uma conseqüência da unicidade (veja o Teorema 1).

EXEMPLO 5 **Substituição**

Encontre a série de Maclaurin de $f(z) = 1/(1+z^2)$.

Solução. Substituindo $-z^2$ por em (11), obtemos

(19)
$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \qquad (|z| < 1).$$ ■

EXEMPLO 6 **Integração**

Encontre a série de Maclaurin de $f(z) = \arctan z$.

Solução. Temos $f'(z) = 1/(1+z^2)$. Integrando (19) termo a termo e utilizando $f(0) = 0$, obtemos

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots \qquad (|z| < 1);$$

Esta série representa o valor principal de $w = u + iv = \arctan z$ definido como o valor para o qual $|u| < \pi/2$. ■

EXEMPLO 7 Desenvolvimento Utilizando a Série Geométrica

Desenvolva $1/(c - z)$ em potências de $z - z_0$, onde $c - z_0 \neq 0$.

Solução. Isso já foi feito na prova do Teorema 1, onde $c = z^*$. O início envolveu uma simples manipulação algébrica, seguida do uso de (11) com z sendo substituído por $(z - z_0)/(c - z_0)$:

$$\frac{1}{c - z} = \frac{1}{c - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(c - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{c - z_0}\right)} = \frac{1}{c - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{c - z_0}\right)^n$$

$$= \frac{1}{c - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{c - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{c - z_0}\right)^2 + \cdots\right).$$

Esta série converge para

$$\left|\frac{z - z_0}{c - z_0}\right| < 1, \qquad \text{ou seja,} \qquad |z - z_0| < |c - z_0|. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 8 Série Binomial, Redução por Frações Parciais

Encontre a série de Taylor da seguinte função com o centro $z_0 = 1$.

$$f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$$

Solução. Desenvolvemos $f(z)$ em frações parciais, e a primeira fração numa **série binomial**

(20)
$$\frac{1}{(1 + z)^m} = (1 + z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n$$
$$= 1 - mz + \frac{m(m + 1)}{2!} z^2 - \frac{m(m + 1)(m + 2)}{3!} z^3 + \cdots$$

com $m = 2$ e a segunda fração numa série geométrica, e então somamos termo a termo as duas séries. Isso fornece

$$f(z) = \frac{1}{(z + 2)^2} + \frac{2}{z - 3} = \frac{1}{[3 + (z - 1)]^2} - \frac{2}{2 - (z - 1)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\left[1 + \frac{1}{3}(z - 1)\right]^2}\right) - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(z - 1)}$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{z - 1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - 1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n(n + 1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right] (z - 1)^n$$

$$= -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z - 1) - \frac{23}{108}(z - 1)^2 - \frac{275}{1944}(z - 1)^3 - \cdots.$$

Vemos que a primeira série converge para $|z - 1| < 3$ e a segunda série converge para $|z - 1| < 2$. Isso era de se esperar, visto que $1/(z + 2)^2$ é singular em -2 e $2/(z - 3)$ em 3, e esses pontos estão localizados respectivamente às distâncias 3 e 2 do centro $z_0 = 1$. Logo, toda a série converge para $|z - 1| < 2$. $\blacksquare$

PROBLEMAS PROPOSTOS 15.4

1–12 SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN

Encontre a série de Taylor ou de Maclaurin da função dada considerando que o ponto fornecido é o centro e determine o raio de convergência.

1. e^{-2z}, 0

2. $1/(1 - z^3)$, 0

3. e^z, $-2i$

4. $\cos^2 z$, 0

5. $\operatorname{sen} z$, $\pi/2$

6. $1/z$, 1

7. $1/(1 - z)$, i

8. $\operatorname{Ln}(1 - z)$, i

9. $e^{-z^2/2}$, 0

10. $e^{z^2}\displaystyle\int_0^z e^{-t^2}\,dt$, 0

11. $z^6 - z^4 + z^2 - 1$, 1

12. $\operatorname{senh}(z - 2i)$, $2i$

13–16 FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS SUPERIORES

Encontre a série de Maclaurin integrando termo a termo. (Essas integrais não podem ser avaliadas pelos métodos usuais do cálculo. Elas definem a **função erro** erf z, a **seno integral** $\operatorname{Si}(z)$ e as **integrais de Fresnel**[4] $\operatorname{S}(z)$ e $\operatorname{C}(z)$, que ocorrem em estatística, condução do calor, óptica e outras aplicações. Estes são casos especiais das chamadas funções transcendentais superiores.)

13. $\operatorname{erf} z = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-t^2}\,dt$

14. $\operatorname{Si}(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

15. $\operatorname{S}(z) = \displaystyle\int_0^z \operatorname{sen} t^2\,dt$

16. $\operatorname{C}(z) = \displaystyle\int_0^z \cos t^2\,dt$

17. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. sec, tan, arcsen. (a) Números de Euler. A série de Maclaurin

(21) $$\sec z = E_0 - \frac{E_2}{2!} z^2 + \frac{E_4}{4!} z^4 - + \cdots$$

[4] AUGUSTIN FRESNEL (1788–1827), físico e engenheiro francês, conhecido por seus trabalhos em óptica.

define os *números de Euler* E_{2n}. Mostre que $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$. Escreva um programa para calcular os valores de E_{2n} a partir da fórmula dos coeficientes em (1), ou que seja capaz de extraí-los como uma listagem da série. (Tabelas estão disponíveis na Ref. [RG1], listada no Apêndice 1.)

(b) Números de Bernoulli. A série de Maclaurin

$$\textbf{(22)} \qquad \frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \cdots$$

define os *números de Bernoulli* B_n. Usando o método dos coeficientes a determinar, mostre que

$$\text{(23)} \qquad \begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \\ B_4 &= -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \cdots. \end{aligned}$$

Escreva um programa para calcular B_n.

(c) Tangente. Usando (1) e (2) da Seção 13.6 e (22), mostre que tan z possui a seguinte série de Maclaurin e utilize-a para calcular uma tabela de $B_0, \cdots, B_{20}$:

$$\text{(24)} \qquad \begin{aligned} \tan z &= \frac{2i}{e^{2iz} - 1} - \frac{4i}{e^{4iz} - 1} - i \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}. \end{aligned}$$

18. (Seno inverso) Desenvolvendo $1/\sqrt{1 - z^2}$ e integrando, mostre que

$$\operatorname{arcsen} z = z + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)\frac{z^5}{5} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)\frac{z^7}{7} + \cdots (|z| < 1).$$

Mostre que essa série representa o valor principal de arcsen z (definido no Projeto de Equipe 30 da Seção 13.7).

19. (Coeficientes a determinar) Utilizando a relação sen z = tan z cos z e as séries de Maclaurin para sen z e cos z, encontre os quatro primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin de tan z. (Mostre os detalhes.)

20. PROJETO DE EQUIPE. Propriedades da Séries de Maclaurin. Obviamente, podemos calcular valores de funções a partir de séries. Neste projeto, devemos mostrar que as propriedades das funções podem freqüentemente ser descobertas a partir de suas séries de Taylor ou de Maclaurin. Usando uma série conveniente, prove o seguinte.

(a) As fórmulas para as derivadas de e^z, cos z, sen z, cosh z, senh z e Ln $(1 + z)$

(b) $\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$

(c) sen $z \neq 0$ para todo imaginário puro $z = iy \neq 0$

15.5 Convergência Uniforme. *Opcional*

Sabemos que as séries de potências são *absolutamente convergentes* (Seção 15.2, Teorema 1) e, para apresentarmos outra propriedade básica, mostremos agora que elas são *uniformemente convergentes*. Como a convergência uniforme tem uma importância geral, por exemplo, em conexão com a integração termo a termo das séries, faremos uma discussão bastante completa disso.

Para definirmos convergência uniforme, consideremos uma série cujos termos sejam funções complexas quaisquer $f_0(z), f_1(z), \cdots$

$$\text{(1)} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots.$$

(Isso inclui as séries de potências como um caso especial onde $f_m(z) = a_m (z - z_0)^m$). Suponhamos que a série (1) convirja para todo z em alguma região G. Chamemos sua soma de $s(z)$ e sua n-ésima soma parcial de $s_n(z)$; portanto,

$$s_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z).$$

A convergência em G significa o seguinte. Se em G tomarmos um $z = z_1$, então, pela definição de convergência em z_1, para um dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um $N_1(\epsilon)$ tal que

$$|s(z_1) - s_n(z_1)| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N_1(\epsilon).$$

Se tomarmos um z_2 em G, mantendo ϵ como antes, podemos encontrar um $N_2(\epsilon)$ tal que

$$|s(z_2) - s_n(z_2)| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N_2(\epsilon),$$

e assim por diante. Logo, dado um $\epsilon > 0$, a cada z em G corresponde um número $N_z(\epsilon)$. Esse número informa-nos de quantos termos precisamos (de qual s_n necessitamos) em um z para deixarmos $|s(z) - s_n(z)|$ menor que ϵ. Portanto, esse número $N_2(\epsilon)$ mede a velocidade da convergência.

Pequenos valores de $N_z(\epsilon)$ significam uma convergência rápida, ao passo que grandes valores de $N_z(\epsilon)$ significam uma convergência vagarosa no ponto z considerado. Agora, se pudermos encontrar um $N(\epsilon)$ maior que todos esses $N_z(\epsilon)$ para todo z em G, diremos que a convergência da série (1) em G é *uniforme*. Logo, esse conceito básico é definido do seguinte modo.

DEFINIÇÃO

Convergência Uniforme

Dizemos que uma série (1) com a soma $s(z)$ é **uniformemente convergente** numa região G se, para cada $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um $N = N(\epsilon)$, ***não-dependente de z***, tal que

$$|s(z) - s_n(z)| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N(\epsilon) \textbf{ e todo } z \textbf{ em } G.$$

A uniformidade da convergência é, portanto, uma propriedade que sempre se refere a um *conjunto infinito* no plano z, ou seja, a um conjunto consistindo em um número infinitamente grande de pontos.

EXEMPLO 1 **Série Geométrica**

Mostre que a série geométrica $1 + z + z^2 + \cdots$ é (a) uniformemente convergente num disco fechado qualquer $|z| \leqq r < 1$, (b) não uniformemente convergente na totalidade de seu disco de convergência $|z| < 1$.

Solução. **(a)** Para z nesse disco fechado, temos $|1 - z| \geqq 1 - r$ (faça um esboço). Isso implica que $1/|1 - z| \leqq 1/(1 - r)$. Logo (lembre de (8) da Seção 15.4, fazendo $q = z$)

$$|s(z) - s_n(z)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} z^m \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{1 - z} \right| \leqq \frac{r^{n+1}}{1 - r}.$$

Como $r < 1$, podemos fazer com que o lado direito seja tão pequeno quanto quisermos, escolhendo um n suficientemente grande e, uma vez que o lado direito não depende de z (no disco fechado considerado), isso significa que a convergência é uniforme.

(b) Para um K real dado (não importando quão grande) e n, podemos sempre encontrar um z no disco $|z| < 1$ tal que

$$\left| \frac{z^{n+1}}{1 - z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} > K,$$

simplesmente considerando z suficientemente próximo de 1. Logo, nenhum valor único de $N(\epsilon)$ será suficiente para fazer com que $|s(z) - s_n(z)|$ seja menor que um dado ϵ *na totalidade do disco*. Por definição, isso mostra que a convergência da série geométrica em $|z| < 1$ não é uniforme. ■

Esse exemplo sugere que, *para uma série de potências, a uniformidade da convergência pode, no máximo, ser perturbada próximo do círculo de convergência*. Temos então que é válido o:

TEOREMA 1

Convergência Uniforme das Séries de Potências

Uma série de potências

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z - z_0)^m \tag{2}$$

com um raio de convergência R não-nulo é uniformemente convergente em todo o disco circular $|z - z_0| \leqq r$ de raio $r < R$.

PROVA Para $|z - z_0| \leqq r$ e valores inteiros positivos quaisquer de n e p, temos

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| \leqq |a_{n+1}|r^{n+1} + \cdots + |a_{n+p}|r^{n+p}. \tag{3}$$

Agora, (2) converge absolutamente se $|z - z_0| = r < R$ (pelo Teorema 1 da Seção 15.2). Logo, do princípio da convergência de Cauchy (Seção 15.1), decorre que, com um $\epsilon > 0$ sendo dado, podemos encontrar um $N(\epsilon)$ tal que

$$|a_{n+1}|r^{n+1} + \cdots + |a_{n+p}|r^{n+p} < \epsilon \qquad \text{para } n > N(\epsilon) \quad \text{e} \quad p = 1, 2, \cdots.$$

Disso e de (3), obtemos

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| < \epsilon$$

para todo z no disco $|z - z_0| \leqq r$, para todo $n > N(\epsilon)$ e para todo $p = 1, 2, \cdots$ Como $N(\epsilon)$ independe de z, isso mostra que há convergência uniforme, de modo que o teorema fica provado. ■

O Teorema 1 satisfaz nossa necessidade e preocupação principais, que são as séries de potências. O restante desta seção fornecerá uma compreensão mais aprofundada do conceito de convergência uniforme em conexão com séries arbitrárias de termos variáveis.

Propriedades das Séries Uniformemente Convergentes

A convergência uniforme deriva sua principal importância de dois fatos:

1. Se uma série de termos *contínuos* for uniformemente convergente, sua soma será também contínua (Teorema 2 a seguir).
2. Sob certas suposições, é possível fazer a integração termo a termo (Teorema 3).

Isso levanta duas questões:

1. De que modo uma série convergente de termos contínuos pode ter uma soma descontínua? (Exemplo 2)
2. Como pode algo dar errado na integração termo a termo? (Exemplo 3)

Uma outra questão natural é:

3. Qual é a relação entre convergência absoluta e convergência uniforme? A resposta surpreendente para isso é: nenhuma. (Exemplo 5)

Essas são as idéias que iremos discutir.

Se somarmos um número *finito* de funções contínuas, obtemos uma função contínua como sua soma. O Exemplo 2 mostrará que isso deixa de ser verdadeiro para séries infinitas, mesmo quando elas são absolutamente convergentes. Entretanto, se elas forem *uniformemente* convergentes, isso não pode acontecer, de acordo com o que se segue.

TEOREMA 2 **Continuidade da Soma**

Considere que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

seja uniformemente convergente numa região G e que F(z) seja sua soma. Então, se em G cada termo $f_m(z)$ for contínuo num ponto z_1, a função F(z) é contínua em z_1.

PROVA Chamemos de $s_n(z)$ a n-ésima soma parcial da série e de $R_n(z)$ o resto correspondente:

$$s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \qquad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots.$$

Como a série converge uniformemente, para um dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $N = N(\epsilon)$ tal que

$$|R_N(z)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo } z \text{ em } G.$$

Como $s_N(z)$ é uma soma de um número finito de funções que são contínuas em z_1, essa soma é contínua em z_1. Portanto, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|s_N(z) - s_N(z_1)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo } z \text{ em } G \text{ para o qual } |z - z_1| < \delta.$$

Usando $F = s_N + R_N$ e a desigualdade triangular do triângulo (Seção 13.2) para esses valores de z, obtemos, portanto,

$$|F(z) - F(z_1)| = |s_N(z) + R_N(z) - [s_N(z_1) + R_N(z_1)]| \leqq |s_N(z) - s_N(z_1)| + |R_N(z)| + |R_N(z_1)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Isso implica que $F(z)$ é contínua em z_1, o que demonstra o teorema. ■

EXEMPLO 2 **Séries de Termos Contínuos com uma Soma Descontínua**

Considere a série

$$x^2 + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} + \cdots \qquad (x \text{ real}).$$

Trata-se de uma série geométrica com $q = 1/(1 + x^2)$ multiplicada por um fator x^2. Sua n-ésima soma parcial é

$$s_n(x) = x^2\left[1 + \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{(1 + x^2)^2} + \cdots + \frac{1}{(1 + x^2)^n}\right].$$

Agora, usamos um truque para encontrar a soma de uma série geométrica, a saber, multiplicamos $s_n(x)$ por $-q = -1/(1 + x^2)$,

$$-\frac{1}{1+x^2}\,s_n(x) = -x^2\left[\frac{1}{1+x^2} + \cdots + \frac{1}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right].$$

Somando isso à fórmula anterior, simplificando o lado esquerdo e cancelando a maioria dos termos no lado direito, obtemos

$$\frac{x^2}{1+x^2}\,s_n(x) = x^2\left[1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right],$$

portanto,

$$s_n(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

A excitante Fig. 365 "explica" o que está acontecendo. Vemos que, se $x \neq 0$, a soma é

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 1 + x^2,$$

porém, para $x = 0$, temos que $s_n(0) = 1 - 1 = 0$ para todo n, logo, $s(0) = 0$. Dessa forma, temos o fato surpreendente de que a soma é descontínua (em $x = 0$), embora todos os termos sejam contínuos e a série convirja mesmo de modo absoluto (seus termos são não-negativos, sendo portanto, iguais a seus respectivos módulos!).

O Teorema 2 agora nos diz que a convergência não pode ser uniforme num intervalo contendo $x = 0$. Podemos também verificar isso diretamente. Com efeito, para $x \neq 0$, o resto possui o valor absoluto

$$|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

e vemos que para um dado $\epsilon(< 1)$ não podemos encontrar um N dependendo somente de ϵ tal que $|R_n| < \epsilon$ para todo $n > N(\epsilon)$ e para todo x, digamos, no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. ■

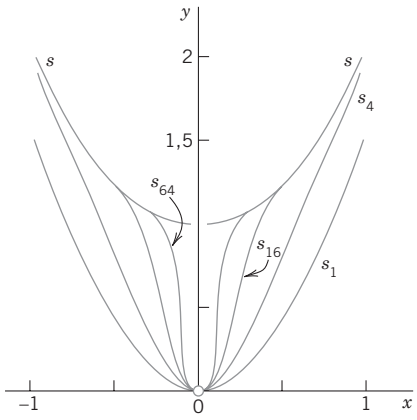


Fig. 365. Fórmulas parciais no Exemplo 2

Integração Termo a Termo

Este é o nosso segundo tópico em conexão com a convergência uniforme e começaremos com um exemplo para nos darmos conta do perigo de cegamente fazer uma integração termo a termo.

EXEMPLO 3 Séries para as quais a Integração Termo a Termo Não É Permissível

Considere $u_m(x) = mxe^{-mx^2}$ e a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) \qquad \text{onde} \qquad f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x)$$

no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. A n-ésima soma parcial é

$$s_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n.$$

Logo, a série possui a soma $F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$. Disso, obtemos

$$\int_0^1 F(x)\,dx = 0.$$

Por outro lado, integrando termo a termo e usando $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = s_n$, temos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\,dx.$$

Agora, $s_n = u_n$ e a expressão no lado direito torna-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2}\,,$$

porém não 0. Isso mostra que a série considerada não pode ser integrada termo a termo de $x = 0$ até $x = 1$. ■

A série do Exemplo 3 não é uniformemente convergente no intervalo de integração, e provaremos agora que, no caso de uma série uniformemente convergente de funções contínuas, é possível fazer a integração termo a termo.

TEOREMA 3

Integração Termo a Termo

Considere que

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

seja uma série uniformemente convergente de funções contínuas numa região G. Considere que C seja um caminho qualquer em G. Então a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_C f_m(z)\,dz = \int_C f_0(z)\,dz + \int_C f_1(z)\,dz + \cdots \tag{4}$$

é convergente e possui a soma $\int_C F(z)\,dz$.

PROVA Do Teorema 2, decorre que $F(z)$ é contínua. Chamemos de $s_n(z)$ a n-ésima soma parcial da série dada, e $R_n(z)$ o resto correspondente. Então, $F = s_n + R_n$ e, por integração,

$$\int_C F(z)\,dz = \int_C s_n(z)\,dz + \int_C R_n(z)\,dz.$$

Chamemos de L o comprimento de C. Como a série dada converge uniformemente, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, podemos encontrar um número N tal que $|R_n(z)| < \epsilon/L$ para todo $n > N$ e todo z em G. Aplicando a desigualdade ML (Seção 14.1), obtemos, portanto,

$$\left|\int_C R_n(z)\,dz\right| < \frac{\epsilon}{L}\,L = \epsilon \qquad \text{para todo } n > N.$$

Como $R_n = F - s_n$, isso significa que

$$\left|\int_C F(z)\,dz - \int_C s_n(z)\,dz\right| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N.$$

Logo, a série (4) converge e possui a soma indicada no teorema. ■

Os Teoremas 2 e 3 caracterizam as duas propriedades mais importantes das séries uniformemente convergentes. Além disso, como derivação e integração são processos inversos, o Teorema 3 implica o

TEOREMA 4

Derivação Termo a Termo

Considere que a série $f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots$ *seja convergente numa região G e que* $F(z)$ *seja a sua soma. Suponha que a série* $f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots$ *seja uniformemente convergente em G e que seus termos sejam contínuos em G. Então,*

$$F'(z) = f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots \qquad \textit{para todo } z \textit{ em } G.$$

Teste da Convergência Uniforme

Usualmente se demonstra a convergência uniforme por meio do seguinte teste da comparação.

TEOREMA 5 **Teste *M* de Weierstrass para a Convergência Uniforme**[5]

Considere uma série da forma (1) *numa região G do plano z. Suponha que se possa encontrar uma série convergente de termos constantes,*

$$M_0 + M_1 + M_2 + \cdots, \tag{5}$$

tal que $|f_m(z)| \leqq M_m$ *para todo z em G e todo* $m = 0, 1, \cdots$ *Então,* (1) *é uniformemente convergente em G.*

A prova disso, que é simples, é deixada ao estudante (Projeto de Equipe 18).

EXEMPLO 4 **Teste *M* de Weierstrass**

A série a seguir é uniformemente convergente no disco $|z| \leqq 1$?

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|}$$

Solução. A convergência uniforme decorre do teste *M* de Weirstrass e da convergência de $\Sigma 1/m^2$ (veja a Seção 15.1, na prova do Teorema 8) porque

$$\left|\frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|}\right| \leqq \frac{|z|^m + 1}{m^2} \leqq \frac{2}{m^2}.$$

■

Ausência de Relação entre Convergência Absoluta e Convergência Uniforme

Finalmente, mostremos o fato surpreendente segundo o qual existem séries que convergem de modo absoluto, porém não-uniforme, ao passo que há outras que convergem de modo uniforme, porém não absoluto, de maneira que não existe qualquer relação entre esses dois conceitos.

EXEMPLO 5 **Ausência de Relação entre Convergência Absoluta e Convergência Uniforme**

A série do Exemplo 2 converge de modo absoluto, porém não uniforme, como já mostramos. Por outro lado, a série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{x^2 + m} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{1}{x^2 + 3} - + \cdots \qquad (x \text{ real})$$

converge em todo o eixo real de modo uniforme, porém não absoluto.

Prova. Pelo familiar teste de Leibniz existente no cálculo (veja o Apêndice A3.3), o resto R_n não excede seu primeiro termo em valor absoluto, uma vez que temos uma série de termos alternados cujos módulos constituem uma seqüência monotonamente decrescente, com o limite zero. Logo, dado um $\epsilon > 0$, para todo x temos

$$|R_n(x)| \leqq \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n} < \epsilon \qquad \text{se } n > N(\epsilon) \geqq \frac{1}{\epsilon}.$$

Isso prova a convergência uniforme, uma vez que $N(\epsilon)$ não depende de x.

A convergência não é absoluta porque, para um *x fixo* qualquer, temos

$$\left|\frac{(-1)^{m-1}}{x^2 + m}\right| = \frac{1}{x^2 + m} > \frac{k}{m}$$

onde k é uma constante adequada e $k\Sigma 1/m$ diverge. ■

[5] KARL WEIERSTRASS (1815–1897), grande matemático alemão, que dedicou toda a sua vida profissional ao desenvolvimento da análise complexa baseada no conceito de séries de potências (veja a nota de rodapé da Seção 13.4). Ele também prestou contribuições fundamentais ao cálculo, ao cálculo das variações, teoria da aproximação e geometria diferencial. Weierstrass chegou ao conceito de convergência uniforme em 1841 (publicado em 1894, *sic*!); a primeira publicação sobre esse conceito foi feita por G. G. STOKES (veja a Seção 10.9) em 1847.

PROBLEMAS PROPOSTOS 15.5

1–8 CONVERGÊNCIA UNIFORME

Prove que a série dada converge uniformemente na região indicada.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (z - 2i)^{2n}, \quad |z - 2i| \leqq 0{,}999$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| \leqq 10^{10}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^4} z^{2n}, \quad |z| \leqq 0{,}56$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n |\pi z|}{n(n+1)}, \quad |z| \leqq 10^5$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad |z| \leqq 1$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 \cosh n|z|}, \quad |z| \leqq 1$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^n |z|}{n^2+1} \quad |z| \leqq 10^{10}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n^2}, \quad |z| \leqq 10^{20}$

9–16 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Encontre a região de convergência uniforme. (Justifique.)

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-2i)^n}{4^n}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{(2n)!}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} z^n$

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} (2z - i)^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} z^n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n \tanh n) z^{2n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{5^n n^2}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

17. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Gráficos de Somas Parciais. (a) Figura 365. Produza essa excitante figura utilizando seu programa de computador e acrescentando curvas adicionais, digamos, as curvas de s_{256}, s_{1024} etc.

(b) Séries de potências. Estude experimentalmente a não-uniformidade da convergência, fazendo gráficos das somas parciais próximas das extremidades do intervalo de convergência para valores reais $z = x$.

18. PROJETO DE EQUIPE. Convergência Uniforme.

(a) Teste *M* de Weierstrass. Forneça uma prova.

(b) Derivação termo a termo. Demonstre o Teorema 4 a partir do Teorema 3.

(c) Sub-regiões. Mostre que a convergência uniforme de uma série numa região G implica a convergência uniforme numa porção qualquer de G. O inverso é verdadeiro?

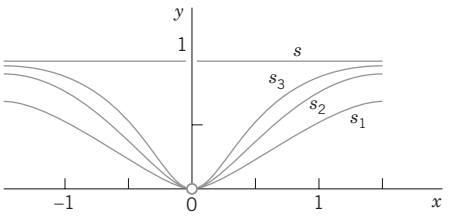


Fig. 366. Soma s e somas parciais no Projeto de Equipe 18(e)

(d) Exemplo 2. Encontre precisamente a região de convergência da série do Exemplo 2, com o x sendo substituído por uma variável complexa z.

(e) Figura 366. Mostre que $x^2 \sum_{m=1}^{\infty} (1 + x^2)^{-m} = 1$ se $x \neq 0$ e 0 se $x = 0$. Calculando valores, verifique que as somas parciais s_1, s_2, s_3 parecem com as mostradas na Fig. 366.

19–20 CONDUÇÃO DO CALOR

Mostre que (9) da Seção 12.5 com os coeficientes (10) é uma solução da equação do calor para $t > 0$, supondo que $f(x)$ seja contínua no intervalo $0 \leqq x \leqq L$ e possua derivadas unilaterais em todos os pontos no interior desse intervalo. Proceda do seguinte modo.

19. Mostre que $|B_n|$ é limitada, digamos, $|B_n| < K$ para todo n. Conclua que

$$|u_n| < Ke^{-\lambda_n^2 t_0} \qquad \text{se} \qquad t \geqq t_0 > 0$$

e, pelo teste de Weierstrass, que a série (9) converge uniformemente em relação a x e t para $t \geqq t_0$, $0 \leqq x \leqq L$. Usando o Teorema 2, mostre que $u(x,t)$ é contínua para $t \geqq t_0$ e, portanto, satisfaz às condições de contorno (2) para $t \geqq t_0$.

20. Mostre que $|\partial u_n/\partial t| < \lambda_n^2 Ke^{-\lambda_n^2 t_0}$ se $t \geqq t_0$ e a série das expressões no lado direito converge pelo teste da razão. Conclua, a partir disso, do teste de Weierstrass e do Teorema 4, que a série (9) pode ser derivada termo a termo com relação a t e que a série resultante possui a soma $\partial u/\partial t$. Mostre que (9) pode ser derivada duas vezes com relação a x e que a série resultante possui a soma $\partial^2 u/\partial x^2$. Conclua disso e do resultado do Problema 19 que (9) é uma solução da equação do calor para todo $t \geqq t_0$. (A prova de que (9) satisfaz à condição inicial dada pode ser encontrada na Ref. [C10] do Apêndice 1.)

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 15

1. O que são séries de potências? Qual a razão de sua grande importância na análise complexa?

2. Enuncie de memória o teste da razão, o teste da raiz e a fórmula de Cauchy-Hadamar para o raio de convergência.

3. O que é convergência absoluta? Convergência condicional? Convergência uniforme?

4. O que você sabe sobre a convergência das séries de potências?

5. O que é uma série de Taylor? Qual era a idéia de obtê-la a partir da fórmula da integral de Cauchy?

6. Dê exemplos de métodos práticos de obtenção de séries de Taylor.

7. O que as séries de potências têm a ver com as funções analíticas?

8. É possível descobrir propriedades de funções a partir de suas respectivas séries de Maclaurin? Em caso afirmativo, dê exemplos.

9. De memória, faça uma lista das séries de Maclaurin de e^z, cos z, sen z, cosh z, senh z, Ln $(1 - z)$.

10. O que você sabe sobre a adição e a multiplicação de séries de potências?

11–20 RAIO DE CONVERGÊNCIA

Encontre o raio de convergência. Você consegue identificar a soma como uma função familiar em alguns destes problemas? (Mostre os detalhes do que fizer.)

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n!}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{2n} z^n$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!} (z - 3i)^{2n}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z - 2)^{2n+1}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n (z - 2i)^{2n}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{10}} z^n$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(3 + 4i)^n}$

21–30 SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN

Encontre a série de Taylor ou de Maclaurin considerando como centro o ponto dado, e determine o raio de convergência. (Mostre os detalhes do que fizer.)

21. e^z, πi

22. Ln z, 2

23. $1/(1 - z)$, -1

24. $1/(4 - 3z)$, $1 + i$

25. $1/(1 - z)^3$, 0

26. $1/z^2$, i

27. $1/z$, $-i$

28. $\int_0^z t^{-1}(e^t - 1)\, dt$, 0

29. cos z, $\frac{1}{2}\pi$

30. sen^2 z, 0

31. Toda função $f(z)$ tem uma série de Taylor?

32. Existe uma série de Taylor em potências de $z - 1 - i$ que diverge em $5 + 5i$ porém converge em $4 + 6i$?

33. Na série de Maclaurin de uma função real $f(x)$, obteríamos uma função analítica se substituíssemos x por z?

34. Usando séries de Maclaurin, mostre que, se $f(z)$ for par, sua integral (com uma constante de integração adequada) é ímpar.

35. Obtenha os primeiros termos da série de Maclaurin de tan z utilizando o produto de Cauchy e

$$\text{sen } z = \cos z \tan z.$$

RESUMO DO CAPÍTULO 15
Séries de Potências, Séries de Taylor

As seqüências, séries e testes de convergência são discutidos na Seção 15.1. Uma **série de potências** tem a forma (Seção 15.2)

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots;$$

e z_0 é seu *centro*. A série (1) converge para todo $|z - z_0| < R$ e diverge para $|z - z_0| > R$, onde R é o **raio de convergência**. Algumas séries de potências convergem para todo z (escrevemos então $R = \infty$). Em casos excepcionais, uma série de potências pode convergir somente no centro; séries assim não têm utilidade prática. Além disso, $R = \lim |a_n/a_{n+1}|$ caso esse limite exista. A série (1) converge absolutamente (Seção 15.2) e **uniformemente** (Seção 15.5) em todo disco fechado $|z - z_0| \leqq r < R$ $(R > 0)$. Ela representa uma função analítica $f(z)$ para $|z - z_0| < R$. As derivadas $f'(z)$, $f''(z)$, $\cdots$ são obtidas por derivação termo a termo de (1) e essas séries têm o mesmo raio de convergência R de (1). Veja a Seção 15.3.

Inversamente, *toda* função analítica $f(z)$ pode ser representada por séries de potências. Essas **séries de Taylor** de $f(z)$ são da forma (Seção 15.4)

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R),$$

como no cálculo. Elas são convergentes para todo z situado no disco aberto com centro z_0 e raio geralmente igual à distância entre z_0 e a **singularidade** mais próxima de $f(z)$ (ponto no qual $f(z)$ deixa de ser analítica, conforme definida na Seção 15.4). Se $f(z)$ for **inteira** (analítica para todo z; veja a Seção 13.5), então (2) converge para todo z. As funções e^z, cos z, sen z etc. possuem séries de Maclaurin, ou seja, séries de Taylor com centro em 0, similarmente às que ocorrem no cálculo (Seção 15.4).

CAPÍTULO 16

Séries de Laurent. Integração por Resíduos

As séries de Laurent são generalizações das séries de Taylor. De fato, enquanto uma série de Taylor possui potências inteiras positivas (e um termo constante) e converge em um disco, uma **série de Laurent** (Seção 16.1) é uma série de potências inteiras positivas ***e negativas*** de $z - z_0$ e converge em um espaço anular (um anel circular) com centro z_0. Portanto, através de uma série de Laurent podemos representar uma dada função $f(z)$ que seja analítica em um espaço anular e possa ter singularidades fora do anel, bem como no "buraco" do espaço anular.

Sabemos que, para uma dada função, a série de Taylor com um centro z_0 é única. Veremos que, por outro lado, uma função $f(z)$ pode ter várias séries de Laurent com o mesmo centro z_0 e válidas em vários espaços anulares concêntricos. A mais importante dessas séries é a que converge para $0 < |z - z_0| < R$, isto é, para qualquer lugar próximo ao centro z_0 exceto no próprio z_0, onde z_0 é um ponto singular de $f(z)$. A série (ou soma finita) das potências negativas *desta* série de Laurent é chamada de **parte principal** da singularidade de $f(z)$ em z_0 e é usada para classificar essa singularidade (Seção 16.2). O coeficiente da potência $1/(z - z_0)$ *desta* série é chamado de **resíduo** de $f(z)$ em z_0. Os resíduos são usados por um elegante e poderoso método de integração, chamado de **integração por resíduos**, para integrais complexas de contorno (Seção 16.3), bem como para certas integrais reais complicadas (Seção 16.4).

Pré-requisito: Capítulos 13, 14, Seção 15.2.
Seções que podem ser omitidas em um curso mais curto: 16.2, 16.4.
Referências e Respostas dos Problemas: Parte D do Apêndice 1 e Apêndice 2.

16.1 Séries de Laurent

As séries de Laurent são generalizações das séries de Taylor. Se, numa aplicação, desejamos expandir uma função $f(z)$ em potências de $z - z_0$ quando $f(z)$ é singular em z_0 (conforme definida na Seção 15.4), não podemos usar uma série de Taylor. Ao invés disso, podemos usar um novo tipo de série, chamada **série de Laurent**,[1] consistindo em potências inteiras positivas de $z - z_0$ (e uma constante), bem como em **potências inteiras negativas** de $z - z_0$; este é o aspecto novo dessa série.

As séries de Laurent são também usadas para classificar singularidades (Seção 16.2), bem como num poderoso método de integração ("integração por resíduos", Seção 16.3).

Uma série de Laurent de $f(z)$ converge num espaço anular (no "buraco" do qual $f(z)$ pode possuir singularidades), pelo seguinte.

TEOREMA 1

Teorema de Laurent

Seja $f(z)$ analítica num domínio contendo dois círculos concêntricos C_1 e C_2 com centro z_0 e o espaço anular entre eles (em cinza na Fig. 367). Então $f(z)$ pode ser representada pela série de Laurent

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \\ &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{b_n}{z - z_0} + \frac{b_1}{(z - z_0)^2} + \cdots \end{aligned}$$

[1]PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813–1854), engenheiro militar e matemático francês, que publicou o teorema em 1843.

consistindo em potências não-negativas e negativas. Os coeficientes desta série de Laurent são dados pelas integrais

(2) $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\,dz^*, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*)\,dz^*,$$

calculadas em sentido anti-horário ao redor de qualquer caminho fechado simples C que se situa no espaço anular e circunda o círculo interno, como na Fig. 367. [A variável de integração é representada por z^*, já que z é usada em (1)].

Esta série converge e representa $f(z)$ no espaço anular aberto ampliado que obtemos do espaço anular dado quando aumentamos continuamente o círculo externo C_1 e diminuímos C_2 até cada um dos dois círculos alcançar um ponto onde $f(z)$ é singular.

No importante caso especial em que z_0 é o único ponto singular de $f(z)$ no interior de C_2, este círculo pode ser encolhido ao ponto z_0, resultando em convergência num disco excetuando-se no centro. Neste caso, a série (ou a soma finita) de potências negativas de (1) *é chamada de* **parte principal** *da singularidade de $f(z)$ em z_0.*

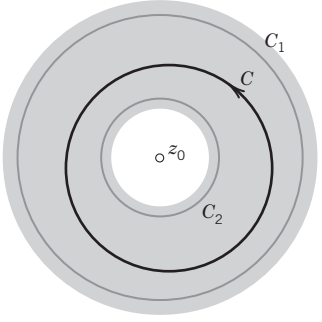


Fig. 367. Teorema de Laurent

COMENTÁRIO. Obviamente, em vez de (1) e (2), podemos escrever (representando b_n por a_{-n}),

(1′) $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

onde todos os coeficientes são agora dados por uma única fórmula integral, a saber,

(2′) $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\,dz^* \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

PROVA Provemos o teorema de Laurent. **(a)** ***As potências não-negativas*** são as de uma série de Taylor. Para vermos isto, usamos a fórmula integral de Cauchy (3) na Seção 14.3 com z^* (ao invés de z) como a variável de integração e com z ao invés de z_0. Consideremos que $g(z)$ e $h(z)$ simbolizem as funções representadas pelos dois termos em (3) da Seção 14.3. Então,

(3) $$f(z) = g(z) + h(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z}\,dz^* - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^* - z}\,dz^*.$$

Aqui, z é qualquer ponto no espaço anular dado e integramos em sentido anti-horário sobre ambos C_1 e C_2, de modo que o sinal negativo aparece, visto que em (3) da Seção 14.3 a integração sobre C_2 é feita no sentido horário. Transformamos cada uma destas duas integrais como na Seção 15.4. O primeiro integral é precisamente como na Seção 15.4. Logo, obtemos precisamente o mesmo resultado, a saber, a série de Taylor de $g(z)$,

(4) $$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z}\,dz^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

com os coeficientes [veja (2) da Seção 15.4, com a integração em sentido anti-horário]

(5) $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\,dz^*.$$

Aqui, podemos substituir C_1 por C (veja a Fig. 367) pelo princípio da deformação do caminho, pois z_0 (o ponto onde o integrando em (5) não é analítico) não é um ponto do espaço anular. Isto prova a fórmula para a_n em (2).

(b) ***As potências negativas*** em (1) e a fórmula para b_n em (2) são obtidas se em (3) considerarmos h(z) (a segunda integral multiplicada por $-1/(2\pi i)$. Como z está situado no espaço anular, ele é exterior ao caminho C_2. Logo, a situação difere daquela referente à primeira integral. O ponto essencial é que, ao invés de [veja (7*) na Seção 15.4]

$$(6) \qquad (a) \qquad \left|\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right| < 1 \qquad \text{agora temos} \qquad (b) \qquad \left|\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right| < 1.$$

Conseqüentemente, devemos desenvolver a expressão $1/(z^* - z)$ no integrando da segunda integral em (3) em potências de $(z^* - z_0)/(z - z_0)$ (ao invés do recíproco disto) para obtermos uma série *convergente*. Encontramos

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{(z - z_0)\left(1 - \dfrac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)}.$$

Compare isso com (7) da Seção 15.4 para compreender realmente a diferença. Então, continue e aplique a fórmula (8) da Seção 15.4 para uma soma geométrica finita, obtendo

$$\frac{1}{z^* - z} = -\frac{1}{z - z_0}\left\{1 + \frac{z^* - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^n\right\} - \frac{1}{z - z^*}\left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^{n+1}.$$

A multiplicação por $-f(z^*)/2\pi i$ e a integração sobre C_2 em ambos os lados agora fornece

$$\begin{aligned} h(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z^*)}{z^* - z}\,dz^* \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z - z_0}\oint_{C_2} f(z^*)\,dz^* + \frac{1}{(z - z_0)^2}\oint_{C_2}(z^* - z_0)f(z^*)\,dz^* + \cdots\right. \\ &\qquad + \frac{1}{(z - z_0)^n}\oint_{C_2}(z^* - z_0)^{n-1}f(z^*)\,dz^* \\ &\qquad \left. + \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}\oint_{C_2}(z^* - z_0)^n f(z^*)\,dz^*\right\} + R_n^*(z) \end{aligned}$$

com o último termo à direita dado por

$$(7) \qquad R_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i(z - z_0)^{n+1}}\oint_{C_2}\frac{(z^* - z_0)^{n+1}}{z - z^*} f(z^*)\,dz^*.$$

Como antes, podemos integrar sobre C ao invés de C_2 nas integrais à direita. Vemos que, no lado direito, a potência $1/(z - z_0)^n$ é multiplicada por b_n como dado em (2). Isto estabelece o teorema de Laurent, desde que

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} R_n^*(z) = 0.$$

(c) Prova da *convergência de* (8). Muito freqüentemente, (1) terá apenas um número finito de potências negativas. Então, não há nada que se provar. Por outro lado, comecemos notando que, em (7), $f(z^*)/(z - z^*)$ tem seu valor absoluto limitado, digamos,

$$\left|\frac{f(z^*)}{z - z^*}\right| < \widetilde{M} \qquad \text{para todo } z^* \text{ sobre } C_2$$

porque $f(z^*)$ é analítica no espaço anular e sobre C_2, e z^* situa-se sobre C_2 e z, externamente, de modo que $z - z^* \neq 0$. Disto e da desigualdade *ML* (Seção 14.1) aplicada a (7), temos a desigualdade (L = comprimento de C_2, $|z^* - z_0|$ = raio de C_2 = *const*.)

$$|R_n^*(z)| \leqq \frac{1}{2\pi|z - z_0|^{n+1}}\,|z^* - z_0|^{n+1}\,\widetilde{M}L = \frac{\widetilde{M}L}{2\pi}\left|\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right|^{n+1}.$$

De (6b), vemos que a expressão à direita se aproxima de zero à medida que n se aproxima do infinito. Isto prova (8). A representação (1) com os coeficientes (2) fica agora estabelecida no espaço anular dado.

(d) ***Convergência de* (1) *no espaço anular ampliado*.** A primeira série em (1) é uma série de Taylor [representando $g(z)$]; logo, ela converge no disco D de centro z_0 cujo raio é igual à distância da singularidade (ou singularidades) mais próxima(s) de z_0. Além disso, g(z) deve ser singular em todos os pontos exteriores a C_1 onde $f(z)$ é singular.

A segunda série em (1), representando $h(z)$, é uma série de potências em $Z = 1/(z - z_0)$. Consideremos o espaço anular dado por $r_2 < |z - z_0| < r_1$, onde r_1 e r_2 são os raios de C_1 e C_2, respectivamente (Fig. 367). Isto corresponde a $1/r_2 > |Z| > 1/r_1$. Portanto, essa série de potências em Z deve convergir pelo menos no disco $|Z| < 1/r_2$. Isto corresponde ao exterior $|z - z_0| > r_2$ de C_2, de modo que $h(z)$ é analítico para todo z exterior a C_2. Também, $h(z)$ deve ser singular no interior de C_2 onde $f(z)$ é singular e a série de potências negativas de (1) converge para todo z no exterior E do círculo com centro z_0 e raio igual à máxima distância de z_0 às singularidades de $f(z)$ dentro de C_2. O domínio comum a D e E é o espaço anular aberto e ampliado, do qual se fala próximo do final do teorema de Laurent, cuja prova fica agora completa. ■

Unicidade. *A série de Laurent de uma dada função analítica f(z) em seu espaço anular de convergência é única* (veja o Projeto de Equipe 24). *Porém, f(z) pode possuir diferentes séries de Laurent em dois espaços anulares com o mesmo centro;* veja os exemplos a seguir. A unicidade é essencial. Assim como nas séries de Taylor, para obtermos os coeficientes das séries de Laurent geralmente não usamos as fórmulas integrais (2); ao invés disso, usamos vários outros métodos, alguns dos quais ilustraremos em nossos exemplos. Se uma série de Laurent for encontrada por qualquer desses processos, a unicidade garante que a série encontrada deve ser ***a*** série de Laurent da função dada no espaço anular dado.

EXEMPLO 1 Uso da Série de Maclaurin

Encontre a série de Laurent de z^{-5} sen z com centro em 0.

Solução. Por (14) da Seção 15.4, obtemos

$$z^{-5}\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n-4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040}\, z^2 + - \cdots \qquad (|z| > 0).$$

Aqui, o "espaço anular" de convergência é todo o plano complexo sem a origem e a parte principal da série em 0 é $z^{-4} - \frac{1}{6}z^{-2}$ ■

EXEMPLO 2 Substituição

Encontre a série de Laurent de $z^2e^{1/z}$ com centro em 0.

Solução. De (12) da Seção 15.4, com z substituído por $1/z$, obtemos uma série de Laurent cuja parte principal é uma série infinita,

$$z^2e^{1/z} = z^2\left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \cdots \qquad (|z| > 0).$$ ■

EXEMPLO 3 Desenvolvimento de 1/(1 – *z*)

Desenvolva $1/(1 - z)$ (a) em potências não-negativas de z e (b) em potências negativas de z.

Solução.

(a) $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (\text{válido se } |z| < 1).$$

(b) $$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots \qquad (\text{válido se } |z| > 1).$$ ■

EXEMPLO 4 Expansões de Laurent em Diferentes Espaço Anulares Concêntricos

Encontre todas as séries de Laurent de $1/(z^3 - z^4)$ com centro em 0.

Solução. Multiplicando por $1/z^3$, obtemos do Exemplo 3

(I) $$\frac{1}{z^3 - z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \qquad (0 < |z| < 1),$$

(II) $$\frac{1}{z^3 - z^4} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+4}} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \cdots \qquad (|z| > 1).$$ ■

EXEMPLO 5 Uso de Frações Parciais

Encontre todas as séries de Taylor e Laurent de $f(z) = \dfrac{-2z + 3}{z^2 - 3z + 2}$ com centro 0.

Solução. Em termos de frações parciais,

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

(a) e (b) no Exemplo 3 referem-se à primeira fração. Para a segunda fração,

(c) $$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}z\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\, z^n \qquad (|z| < 2).$$

(d) $$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad (|z|>2).$$

(I) De (a) e (c), válido para $|z| < 1$ (veja a Fig. 368),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n = \frac{3}{2}+\frac{5}{4}z+\frac{9}{8}z^2+\cdots.$$

(II) De (c) e (b), válido para $1 < |z| < 2$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2+\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots.$$

(III) De (d) e (b), válido para $|z| > 2$,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)\frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}-\frac{5}{z^3}-\frac{9}{z^4}-\cdots. \qquad \blacksquare$$

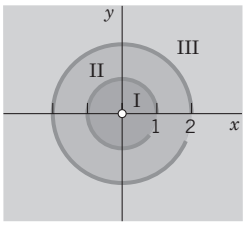


Fig. 368. Regiões de convergência do Exemplo 5

Se, no teorema de Laurent, $f(z)$ é analítica dentro de C_2, então em (2) os coeficientes b_n são nulos, segundo o teorema integral de Cauchy, de modo que a série de Laurent se reduz a uma série de Taylor. Os exemplos 3(a) e 5(I) ilustram isto.

PROBLEMAS PROPOSTOS 16.1

1–6 SÉRIES DE LAURENT PRÓXIMAS A UMA SINGULARIDADE EM 0

Expanda a função dada em uma série de Laurent que convirja para $0 < |z| < R$ e determine a região precisa da convergência. (Mostre os detalhes do que fizer.)

1. $\dfrac{1}{z^4-z^5}$ **2.** $z\cos\dfrac{1}{z}$

3. $\dfrac{e^{-z}}{z^3}$ **4.** $\dfrac{\cosh 2z}{z^2}$

5. $z^{-3}e^{1/z^2}$ **6.** $\dfrac{e^z}{z^2-z^3}$

7–14 SÉRIES DE LAURENT PRÓXIMAS A UMA SINGULARIDADE EM Z_0

Expanda a função dada em uma série de Laurent que convirja para $0 < |z-z_0| < R$ e determine a região precisa da convergência. (Mostre os detalhes.)

7. $\dfrac{e^z}{z-1}$, $z_0 = 1$ **8.** $\dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-\frac{1}{4}\pi)^3}$, $z_0 = \frac{1}{4}\pi$

9. $\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0 = i$ **10.** $\dfrac{\cos z}{(z-\pi)^4}$, $z_0 = \pi$

11. $\dfrac{1}{(z+i)^2-(z+i)}$, $z_0 = -i$ **12.** $\dfrac{z^3}{(z+i)^2}$, $z_0 = -i$

13. $\dfrac{z^2-4}{z-1}$, $z_0 = 1$ **14.** $z^2\operatorname{senh}\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$

15–23 SÉRIES DE TAYLOR E LAURENT

Encontre todas as séries de Taylor e Laurent com centro $z = z_0$ e determine as regiões precisas de convergência.

15. $\dfrac{1}{1-z^3}$, $z_0 = 0$ **16.** $\dfrac{1}{1-z^2}$, $z_0 = 1$

17. $\dfrac{z^2}{1-z^4}$, $z_0 = 0$ **18.** $\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 1$

19. $\dfrac{z^3-2iz^2}{(z-i)^2}$, $z_0 = i$ **20.** $\dfrac{\operatorname{senh} z}{(z-1)^4}$, $z_0 = 1$

21. $\dfrac{4z-1}{z^4-1}$, $z_0 = 0$ **22.** $\dfrac{1}{z^2}$, $z_0 = i$

23. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z+\frac{1}{2}\pi}$, $z_0 = -\frac{1}{2}\pi$

24. PROJETO DE EQUIPE. Séries de Laurent. (a) Unicidade. Prove que a expansão de Laurent de uma dada função analítica em um determinado espaço anular é única.

(b) Acúmulo de singularidades. Será que $\tan(1/z)$ possui uma série de Laurent convergente numa região $0 < |z| < R$? (Justifique.)

(c) Integrais. Expanda as seguintes funções em uma série de Laurent que convirja para $|z| > 0$:

$$\frac{1}{z^2}\int_0^z \frac{e^t-1}{t}\,dt, \qquad \frac{1}{z^3}\int_0^z \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

25. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Frações Parciais. Escreva um programa para obter séries de Laurent pelo uso de frações parciais. Usando o programa, verifique os cálculos no Exemplo 5 do texto. Aplique o programa a duas outras funções de sua escolha.

16.2 Singularidades e Zeros. Infinitude

Grosso modo, um *ponto singular* de uma função analítica $f(z)$ é um z_0 no qual $f(z)$ deixa de ser analítica, e um *zero* é um z no qual $f(z) = 0$. Definições precisas serão dadas a seguir. Nesta seção, mostraremos que as séries de Laurent podem ser usadas para classificar singularidades e as séries de Taylor para discutir zeros.

As singularidades foram definidas na Seção 15.4 e agora recordaremos e estenderemos esse assunto. Também lembremos que, por definição, uma função é uma relação de **valor único**, como se enfatizou na Seção 13.3.

Dizemos que uma função $f(z)$ **é singular** ou **tem uma singularidade** em um ponto $z = z_0$ se $f(z)$ não for analítica (não sendo talvez nem mesmo definida) em $z = z_0$, porém toda a vizinhança de $z = z_0$ contém pontos nos quais $f(z)$ é analítica. Também dizemos que $z = z_0$ é um **ponto singular** de $f(z)$.

Chamamos $z = z_0$ de **singularidade isolada** de $f(z)$ se $z = z_0$ possui uma vizinhança sem outras singularidades de $f(z)$. *Exemplo:* tan z tem singularidades isoladas em $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$ etc.; tan $(1/z)$ tem uma singularidade não isolada em 0. (Explique!)

As singularidades isoladas de $f(z)$ em $z = z_0$ podem ser classificadas pelas séries de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{1}$$

(Seção 16.1)

válidas ***na vizinhança imediata*** do ponto singular $z = z_0$, exceto no próprio z_0, ou seja, na região de forma

$$0 < |z - z_0| < R.$$

A soma da primeira série é analítica em $z = z_0$, como sabemos da última seção. A segunda série, contendo as potências negativas, é chamada de **parte principal** de (1), como lembramos da última seção. Se ela possui apenas termos finitos, ela é da forma

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \qquad (b_m \neq 0). \tag{2}$$

Então, dizemos que a singularidade de $f(z)$ em $z = z_0$ é um **pólo** e que m é sua **ordem**. Pólos da primeira ordem são conhecidos também como **pólos simples.**

Se a parte principal de (1) tem um número finito de termos, dizemos que $f(z)$ tem, em $z = z_0$, uma **singularidade essencial isolada.**

Deixamos de lado as singularidades não isoladas.

EXEMPLO 1 Pólos. Singularidades Essenciais

A função

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 2)^5} + \frac{3}{(z - 2)^2}$$

tem um pólo simples em $z = 0$ e um pólo de quinta ordem em $z = 2$. Exemplos de funções contendo uma singularidade essencial isolada em $z = 0$ são

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots$$

e

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - + \cdots.$$

A Seção 16.1 ilustra outros casos, como o Exemplo 1, no qual z^{-5} sen z tem um pólo de quarta ordem em 0. O Exemplo 4 mostra que $1/(z^3 - z^4)$ tem um pólo de terceira ordem em 0 e uma série de Laurent com infinitas potências negativas. Isto não é uma contradição, visto que esta série é válida para $|z| > 1$; isso meramente nos diz que, ao classificar singularidades, é muito importante considerar a série de Laurent válida ***na vizinhança imediata*** de um ponto singular. No Exemplo 4, esta é a série (I), que possui três potências negativas. ■

A classificação de singularidades em pólos e singularidades essenciais não é meramente uma questão formal, porque o comportamento de uma função analítica numa vizinhança de uma singularidade essencial é inteiramente diferente do comportamento na vizinhança de um pólo.

EXEMPLO 2 Comportamento Próximo a um Pólo

$f(z) = 1/z^2$ possui um pólo em $z = 0$, e $|f(z)| \to \infty$ quando $z \to 0$ de qualquer maneira. Isto ilustra o seguinte teorema. ■

TEOREMA 1

Pólos

Se $f(z)$ é analítica e tem um pólo em $z = z_0$, então $|f(z)| \to \infty$ à medida que *$z \to z_0$ de qualquer maneira.*

Deixamos a prova para o estudante (veja o Problema 12).

EXEMPLO 3 **Comportamento Próximo a uma Singularidade Essencial**

A função $f(z) = e^{1/z}$ possui uma singularidade essencial em $z = 0$. Ela não tem limite de aproximação ao longo do eixo imaginário; torna-se infinita se $z \to 0$ pelos valores reais positivos, mas se aproxima de zero se $z \to 0$ pelos valores reais negativos. Ela assume qualquer valor dado $c = c_0 e^{i\alpha} \neq 0$ numa pequena vizinhança ε arbitrariamente pequena de $z = 0$. Para visualizarmos esta última, fazemos $z = re^{i\theta}$ e então obtemos a seguinte equação complexa para r e θ, que precisamos resolver:

$$e^{1/z} = e^{(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)/r} = c_0 e^{i\alpha}.$$

Igualando os módulos e os argumentos, temos $e^{(\cos\theta)/r} = c_0$, ou seja,

$$\cos\theta = r \ln c_0, \qquad \text{e} \qquad -\operatorname{sen}\theta = \alpha r$$

respectivamente. Dessas duas equações e de $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = r^2(\ln c_0)^2 + \alpha^2 r^2 = 1$, obtemos as fórmulas

$$r^2 = \frac{1}{(\ln c_0)^2 + \alpha^2} \qquad \text{e} \qquad \tan\theta = -\frac{\alpha}{\ln c_0}.$$

Portanto, r pode-se fazer com que r fique arbitrariamente pequeno adicionando-se a α múltiplos de 2π, deixando c inalterado. Isto ilustra o célebre *Teorema de Picard* (com $z = 0$ como valor excepcional). Para a prova disso, algo complicada, veja a Ref. [D4], vol. 2. Sobre Picard, veja a Seção 1.7. ■

TEOREMA 2

Teorema de Picard

Se $f(z)$ é analítica e tem uma singularidade essencial isolada no ponto z_0, ela assume qualquer valor, com no máximo um valor excepcional, numa vizinhança arbitrariamente pequena ε de z_0.

Singularidades Removíveis. Dizemos que uma função possui uma *singularidade removível* em $z = z_0$ se $f(z)$ não for analítica em $z = z_0$, mas ali puder se tornar analítica pela atribuição de um valor adequado de $f(z_0)$. Tais singularidades não são de interesse, visto que elas podem ser removidas, como já se indicou. *Exemplo:* $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$ torna-se analítica em $z = 0$ se definirmos $f(0) = 1$.

Zeros de Funções Analíticas

Um **zero** de uma função analítica $f(z)$ num domínio D é um $z = z_0$ em D tal que $f(z_0) = 0$. Um zero tem **ordem** n se não apenas f, mas também todas as derivadas $f', f'', \cdots, f^{(n-1)}$ são nulas em $z = z_0$, com a exceção de $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Um zero de primeira ordem é também chamado de **zero simples**. Para um zero de segunda ordem, $f(z_0) = f'(z_0) = 0$ mas $f''(z_0) \neq 0$. E assim por diante.

EXEMPLO 4 **Zeros**

A função $1 + z^2$ tem zeros simples em $\pm i$. A função $(1 - z^4)^2$ tem zeros de segunda ordem em ± 1 e $\pm i$. A função $(z - a)^3$ tem um zero de terceira ordem em $z = a$. A função e^z não tem zeros (veja a Seção 13.5). A função $\operatorname{sen} z$ tem zeros simples em $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$, e $\operatorname{sen}^2 z$ tem zeros de segunda ordem nestes pontos. A função $1 - \cos z$ tem zeros de segunda ordem em $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$, e a função $(1 - \cos z)^2$ tem zeros de quarta ordem nestes pontos. ■

Séries de Taylor em um Zero. Em um zero de n-ésima ordem $z = z_0$ de $f(z)$, as derivadas $f'(z_0), \cdots f^{(n-1)}(z_0)$ são nulas, por definição. Portanto, os primeiros coeficientes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ da série de Taylor (1), Seção 15.4, são também nulos, ao passo que $a_n \neq 0$, de modo que essa série assume a forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots \\ &= (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots] \qquad (a_n \neq 0). \end{aligned} \tag{3}$$

Isto é característico desse zero, porque se $f(z)$ tem tal série de Taylor, ela possui um zero de n-ésima ordem em $z = z_0$, como se segue por derivação.

Enquanto pode haver singularidades não isoladas, para zeros temos o

TEOREMA 3 **Zeros**

Os zeros de uma função analítica $f(z)$ ($\not\equiv 0$) são isolados; ou seja, cada um deles tem uma vizinhança que não contém outros zeros de $f(z)$.

PROVA O fator $(z - z_0)^n$ em (3) é zero apenas em $z = z_0$. A série de potências entre colchetes $[\cdots]$ representa uma função analítica (pelo Teorema 5 da Seção 15.3), que chamaremos de $g(z)$. Ora, $g(z_0) = a_n \neq 0$, visto que uma função analítica é contínua, e por causa desta continuidade, também $g(z) \neq 0$ em alguma vizinhança de $z = z_0$. Logo, o mesmo se verifica com $f(z)$. ■

Este teorema é ilustrado pelas funções no Exemplo 4.

Pólos são freqüentemente causados pela ocorrência de zeros no denominador. (*Exemplo:* tan z tem pólos onde cos z é zero.) Esta é uma razão básica da importância dos zeros. A chave para a conexão é o seguinte teorema, cuja prova decorre de (3) (veja o Projeto de Equipe 24).

TEOREMA 4 **Pólos e Zeros**

Consideremos que $f(z)$ seja analítica em $z = z_0$ e tenha um zero de n-ésima ordem em $z = z_0$. Então, $1/f(z)$ tem um pólo de n-ésima ordem em $z = z_0$, o mesmo ocorrendo com $h(z)/f(z)$, desde que $h(z)$ seja analítica em $z = z_0$ e $h(z_0) \neq 0$.

Esfera Riemanniana. Ponto no Infinito

Quando desejamos estudar funções complexas para grandes $|z|$, o plano complexo geralmente se tornará um tanto inconveniente. Então, pode ser melhor utilizar uma representação de números complexos na chamada **esfera riemanniana**, que é uma esfera S de diâmetro 1 tocando o plano complexo z em $z = 0$ (Fig. 369), e consideramos a imagem de um ponto P (um número z no plano) como sendo a interseção P^* entre o segmento PN e S, onde N é o "Pólo Norte" diametralmente oposto à origem no plano. Então, a cada z corresponde um ponto em S.

Inversamente, cada ponto em S representa um número complexo z, exceto para N, que não corresponde a nenhum ponto no plano complexo. Isto sugere que introduzamos um ponto adicional, chamado de **ponto no infinito** e representado por ∞ ("infinito"), e consideramos sua imagem como N. O plano complexo junto com ∞ é chamado de **plano complexo estendido**. O plano complexo é freqüentemente chamado de *plano complexo finito*, por distinção, ou simplesmente de *plano complexo*, como anteriormente. Dizemos que a esfera S é uma **esfera riemanniana**. O mapeamento do plano complexo estendido sobre a esfera é conhecido como **projeção estereográfica**. (Qual é a imagem do Hemisfério Norte? Do Hemisfério Ocidental? De uma reta passando pela origem?)

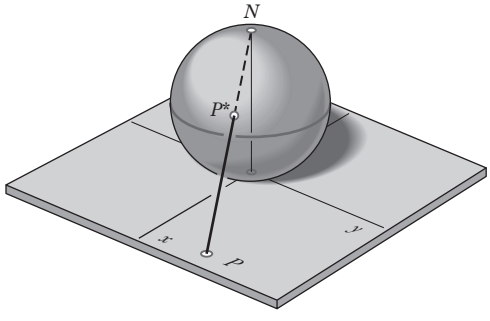


Fig. 369. Esfera riemanniana

Analítica ou Singular no Infinito

Se quisermos investigar uma função $f(z)$ para grandes valores de $|z|$, podemos agora fazer $z = 1/w$ e investigar $f(z) = f(1/w) \equiv g(w)$ numa vizinhança de $w = 0$. Definimos que $f(z)$ é **analítica** ou **singular no infinito** se $g(w)$ for analítica ou singular, respectivamente, em $w = 0$. Também definimos

(4) $$g(0) = \lim_{w \to 0} g(w)$$

se este limite existir.

Além disto, dizemos que $f(z)$ tem um *zero de n*-ésima *ordem no infinito* se $f(1/w)$ tem esse zero em $w = 0$. Algo similar ocorre com os pólos e as singularidades essenciais.

EXEMPLO 5 Funções Analíticas ou Singulares no Infinito. Funções Inteiras e Meromórficas

A função $f(z) = 1/z^2$ é analítica em ∞, visto que $g(w) = f(1/w) = w^2$ é analítica em $w = 0$, e $f(z)$ tem um zero de segunda ordem em ∞. A função $f(z) = z^3$ é singular em ∞ e tem aí um pólo de terceira ordem já que a função $g(w) = f(1/w) = 1/w^3$ tem esse pólo em $w = 0$. A função e^z tem uma singularidade essencial em ∞, visto que $e^{1/w}$ tem essa singularidade em $w = 0$. Similarmente, cos z e sen z têm uma singularidade essencial em ∞.

Lembre que uma **função inteira** é aquela que é analítica em todos os lugares do plano complexo (finito). O Teorema de Liouville (Seção 14.4) nos diz que as únicas funções inteiras *limitadas* são as constantes, portanto qualquer função inteira não-constante deve ser ilimitada. Logo, essa função tem uma singularidade em ∞, um pólo se ela for um polinômio ou uma singularidade essencial se ela não o for. As funções que acabamos de considerar são típicas a esse respeito.

Uma função analítica cujas únicas singularidades no plano finito são pólos é chamada de **função meromórfica**. Exemplos disso são as funções racionais com denominadores não-constantes, tan z, cot z, sec z, e cossec z. ■

Nesta seção, usamos as Séries de Laurent para investigar as singularidades. Na próxima seção, usaremos essas séries num elegante método de integração.

PROBLEMAS PROPOSTOS 16.2

1–10 SINGULARIDADES

Determine a localização e o tipo das singularidades das seguintes funções no plano finito e no infinito. No caso de pólos, diga também qual é a ordem.

1. $\tan^2 \pi z$

2. $z + \dfrac{2}{z} - \dfrac{3}{z^2}$

3. $\cot z^2$

4. $z^3 e^{1/(z-1)}$

5. $\cos z - \operatorname{sen} z$

6. $1/(\cos z - \operatorname{sen} z)$

7. $\dfrac{\operatorname{sen} 3z}{(z^4 - 1)^4}$

8. $\dfrac{4}{z-1} + \dfrac{2}{(z-1)^2} - \dfrac{8}{(z-1)^3}$

9. $\cosh\left[1/(z^2 + 1)\right]$

10. $e^{1/(z-1)}/(e^z - 1)$

11. (**Singularidade essencial**) Discuta e^{1/z^2} de modo similar à função $e^{1/z}$ discutida no Exemplo 3.

12. (**Pólos**) Verifique o Teorema 1 para $f(z) = z^{-3} - z^{-1}$. Prove o Teorema 1.

13–22 ZEROS

Determine a localização e a ordem dos zeros.

13. $(z + 16i)^4$

14. $(z^4 - 16)^4$

15. $z^{-3} \operatorname{sen}^3 \pi z$

16. $\cosh^2 z$

17. $(3z^2 + 1)e^{-z}$

18. $(z^2 - 1)^2(e^{z^2} - 1)$

19. $(z^2 + 4)(e^z - 1)^2$

20. $(\operatorname{sen} z - 1)^3$

21. $(1 - \cos z)^2$

22. $e^z - e^{2z}$

23. **(Zeros)** Se $f(z)$ é analítica e tem um zero de ordem n em $z = z_0$, mostre que $f^2(z)$ tem um zero de ordem $2n$.

24. **PROJETO DE EQUIPE. Zeros. (a) Derivada.** Mostre que, se $f(z)$ tem um zero de ordem $n > 1$ em $z = z_0$, então $f'(z)$ tem um zero de ordem $n - 1$ em z_0.

(b) Pólos e zeros. Prove o Teorema 4.

(c) Pontos de *k* Isolados. Mostre que os pontos nos quais uma função analítica não-constante $f(z)$ tem um determinado valor k são isolados.

(d) Funções idênticas. Se $f_1(z)$ são analíticas num domínio D e iguais numa seqüência de pontos z_n em D que converge em D, mostre que $f_1(z) \equiv f_2(z)$ em D.

25. **(Esfera riemanniana)** Supondo que consideremos a imagem do eixo x como os meridianos 0º e 180º, descreva e esboce (ou represente graficamente) as imagens das seguintes regiões das esferas riemannianas: (a) $|z| > 100$, (b) o meio-plano inferior e (c) $\frac{1}{2} \leqq |z| \leqq 2$.

16.3 Método de Integração por Resíduos

O propósito do método de integração por resíduos de Cauchy é o cálculo de valores das integrais

$$\oint_C f(z)\, dz$$

consideradas em torno de um caminho fechado simples C. A idéia é a seguinte.

Se $f(z)$ é analítica em toda parte sobre C e dentro de C, essa integral é igual a zero pelo teorema integral de Cauchy (Seção 14.2) e nada mais que isso.

Se $f(z)$ tem uma singularidade no ponto $z = z_0$ dentro de C, mas é de outro modo analítica sobre e dentro de C, então $f(z)$ possui uma série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

que converge para todos os pontos próximos de $z = z_0$ (exceto no próprio $z = z_0$), em algum domínio da forma $0 < |z - z_0| < R$ (às vezes chamado de **vizinhança deletada**, um termo antiquado que não usaremos). Agora vem a idéia-chave. Para a primeira potência negativa, o coeficiente b_1, dado por $1/(z - z_0)$ desta série de Laurent é determinado pela fórmula integral (2) da Seção 16.1, com $n = 1$, a saber,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz.$$

Ora, como podemos obter séries de Laurent por vários métodos, sem usar as fórmulas integrais para os coeficientes (veja os exemplos na Seção 16.1), podemos encontrar b_1 através de um desses métodos e então usar a fórmula para b_1 com o propósito de calcular o valor da integral, ou seja,

(1)
$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1.$$

Aqui, integramos em sentido anti-horário ao redor de um caminho fechado simples C que contém $z = z_0$ em seu interior (mas nenhum outro ponto singular de $f(z)$ sobre ou dentro de C!).

O coeficiente b_1 é chamado de **resíduo** de $f(z)$ em $z = z_0$ e o denotamos por

(2)
$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

EXEMPLO 1 Cálculo do Valor de uma Integral por Meio de um Resíduo

Integre a função $f(z) = z^{-4}$ sen z em sentido anti-horário ao redor do círculo unitário C.

Solução. De (14) na Seção 15.4, obtemos a série de Laurent

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + - \cdots$$

que converge para $|z| > 0$ (isto é, para todo $z \neq 0$). Essa série mostra que $f(z)$ tem um pólo de terceira ordem em $z = 0$ e o resíduo $b_1 = -1/3!$. De (1), obtemos assim a resposta

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}\, dz = 2\pi i b_1 = -\frac{\pi i}{3}.$$ ■

EXEMPLO 2 CUIDADO! Use a Série de Laurent Correta!

Integre $f(z) = 1/(z^3 - z^4)$ em sentido horário ao redor do círculo C: $|z| = 1/2$.

Solução. $z^3 - z^4 = z^3(1 - z)$ mostra que $f(z)$ é singular em $z = 0$ e $z = 1$. Ora, $z = 1$ situa-se fora de C, não tendo, portanto, interesse aqui. Assim, precisamos do resíduo de $f(z)$ em 0, e encontramo-lo usando a série de Laurent que converge para $0 < |z| < 1$. Esta é a série (1) no Exemplo 4 da Seção 16.1.

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \qquad (0 < |z| < 1).$$

Vemos disso que esse resíduo é 1. A integração em sentido horário fornece, portanto,

$$\oint_C \frac{dz}{z^3 - z^4} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -2\pi i.$$

CUIDADO! Se tivéssemos usado a série errada (II) no Exemplo 4 da Seção 16.1,

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \cdots \qquad (|z| > 1),$$

teríamos obtido a resposta errada, 0, porque esta série não possui potências de $1/z$. ■

Fórmulas para os Resíduos

Para calcular um resíduo num pólo, não precisamos produzir uma série de Laurent inteira, mas, ao invés disso e de modo mais econômico, podemos obter as fórmulas para os resíduos de uma vez por todas.

Pólos Simples. Para o resíduo de $f(z)$ num pólo simples em z_0, duas fórmulas são

(3)
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

e, supondo que $f(z) = p(z)/q(z)$, $p(z_0) \neq 0$ e $q(z)$ tem um zero simples em z_0 (de modo que $f(z)$ tenha em z_0 um pólo simples, pelo Teorema 4 da Seção 16.2),

(4)
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

PROVA Para um pólo simples em $z = z_0$, a Série de Laurent (1) na Seção 16.1 é

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \qquad (0 < |z - z_0| < R).$$

Aqui, $b_1 \neq 0$. (Por quê?) Multiplicando ambos os lados por $z - z_0$ e então fazendo $z \to z_0$, obtemos a fórmula (3):

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = b_1 + \lim_{z\to z_0} (z - z_0)[a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots] = b_1$$

onde a última igualdade decorre da continuidade (Teorema 1, Seção 15.3).

Provemos (4). A série de Taylor de $q(z)$ em um zero simples z_0 é

$$q(z) = (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \cdots.$$

Substituindo isto em $f = p/q$ e então f em (3), obtemos

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0)[q'(z_0) + (z - z_0)q''(z_0)/2 + \cdots]}.$$

$z - z_0$ se cancela. Pela continuidade, o limite do denominador é $q'(z_0)$, do que decorre (4). ■

EXEMPLO 3 Resíduo num Pólo Simples

$f(z) = (9z + i)/(z^3 + z)$ tem um pólo simples em i porque $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$, e (3) dá o resíduo

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{9z + i}{z(z^2 + 1)} = \lim_{z\to i} (z - i) \frac{9z + i}{z(z + i)(z - i)} = \left[\frac{9z + i}{z(z + i)}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

Por (4) com $p(i) = 9i + i$ e $q'(z) = 3z^2 + 1$, confirmamos o resultado,

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{9z + i}{z(z^2 + 1)} = \left[\frac{9z + i}{3z^2 + 1}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$ ■

Pólos de Qualquer Ordem. O resíduo de $f(z)$ num pólo de m-ésima ordem em z_0 é

(5)
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]\right\}.$$

Em particular, para um pólo de segunda ordem ($m = 2$),

(5*)
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left\{\left[(z - z_0)^2 f(z)\right]'\right\}.$$

PROVA A série de Laurent de $f(z)$ convergindo próximo a z_0 (exceto no próprio z_0) é (Seção 16.2)

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

onde $b_m \neq 0$. O resíduo desejado é b_1. Multiplicando ambos os lados por $(z - z_0)^m$, obtemos

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots.$$

Vemos que b_1 é agora o coeficiente da potência $(z - z_0)^{m-1}$ da série de potências de $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Assim, pelo Teorema de Taylor (Seção 15.4), obtemos (5):

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{(m - 1)!} g^{(m-1)}(z_0) \\ &= \frac{1}{(m - 1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \end{aligned}$$ ■

EXEMPLO 4 Resíduo num Pólo de Ordem Superior

$f(z) = 50z/(z^3 + 2z^2 - 7z + 4)$ tem um pólo de segunda ordem em $z = 1$ porque o denominador é igual a $(z + 4)(z - 1)^2$ (verifique!). De (5*), obtemos o resíduo

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{50z}{z+4}\right) \\ &= \frac{200}{5^2} = 8.\end{aligned}$$

■

Várias Singularidades Dentro do Contorno. Teorema dos Resíduos

A integração por resíduos pode ser estendida do caso de uma singularidade única para o caso de várias singularidades no interior do contorno C. Este é o propósito do teorema dos resíduos. A extensão é surpreendentemente simples.

TEOREMA 1 Teorema dos Resíduos

Consideremos que $f(z)$ seja analítica dentro de um caminho fechado simples C e sobre C, exceto para um número finito de pontos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_k$ interiores a C. Então, a integral de $f(z)$ considerada no sentido anti-horário ao redor de C é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos de $f(z)$ em $z_1, \ldots, z_k$:

(6)
$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

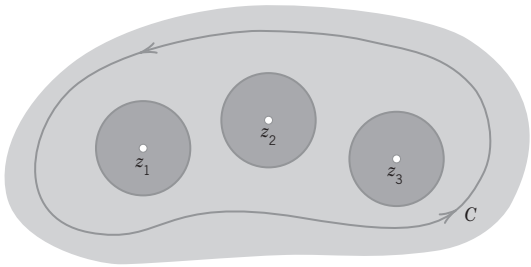


Fig. 370. Teorema dos resíduos

PROVA Encerramos cada um dos pontos singulares z_j num círculo C_j de raio pequeno o bastante para que os k círculos e C fiquem todos separados (Fig. 370). Então, $f(z)$ é analítica no domínio multiplamente conectado D delimitado por C e $C_1, \cdots, C_k$ e sobre todo o contorno de D. Do teorema integral de Cauchy, temos então

(7)
$$\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_k} f(z)\,dz = 0,$$

a integral sobre C tomada *em sentido anti-horário* e as demais integrais *em sentido horário* (como nas Figs. 351 e 352, Seção 14.2). Levamos para o lado direito as integrais sobre $C_1, \cdots, C_k$ e compensamos o sinal negativo resultante invertendo o sentido de integração. Assim,

(8)
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_k} f(z)\,dz$$

onde todos as integrais são agora consideradas no sentido anti-horário. Por (1) e (2),

$$\oint_{C_j} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z), \qquad j = 1, \cdots, k,$$

de modo que (8) fornece (6) e o teorema dos resíduos fica provado. ■

Este importante teorema possui várias aplicações em conexão com integrais complexas e reais. Consideremos primeiro algumas integrais complexas. (As integrais reais seguem na próxima seção.)

EXEMPLO 5 Integração pelo Teorema de Resíduos. Vários Contornos

Calcule o valor da integral a seguir considerada em sentido anti-horário ao redor de qualquer caminho fechado simples, de modo que: (a) 0 e 1 estejam dentro de C, (b) 0 esteja dentro, 1 fora, (c) 1 esteja dentro, 0 fora, (d) 0 e 1 estejam fora.

$$\oint_C \frac{4 - 3z}{z^2 - z}\, dz$$

Solução. O integrando tem pólos simples em 0 e 1, com os resíduos [por (3)]

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{4 - 3z}{z(z - 1)} = \left[\frac{4 - 3z}{z - 1}\right]_{z=0} = -4, \qquad \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{4 - 3z}{z(z - 1)} = \left[\frac{4 - 3z}{z}\right]_{z=1} = 1.$$

[Confirme isto por (4).] *Resp.* (a) $2\pi i(-4 + 1) = -6\pi i$, (b) $-8\pi i$, (c) $2\pi i$, (d) 0. ■

EXEMPLO 6 Outra Aplicação do Teorema dos Resíduos

Integre $(\tan z)/(z^2 - 1)$ em sentido anti-horário ao redor do círculo C: $|z| = 3/2$.

Solução. $\tan z$ não é analítica em $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\cdots$, mas todos esses pontos estão fora do contorno C. Por causa do denominador $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$, a função dada tem pólos simples em ± 1. Assim, obtemos de (4) e do teorema dos resíduos,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\tan z}{z^2 - 1}\, dz &= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{\tan z}{z^2 - 1} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\tan z}{z^2 - 1}\right) \\ &= 2\pi i\left(\left.\frac{\tan z}{2z}\right|_{z=1} + \left.\frac{\tan z}{2z}\right|_{z=-1}\right) \\ &= 2\pi i \tan 1 = 9{,}7855i.\end{aligned}$$

■

EXEMPLO 7 Pólos e Singularidades Essenciais

Calcule o valor da integral a seguir, onde C é a elipse $9x^2 + y^2 = 9$ (considere o sentido anti-horário, faça um esboço).

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} + ze^{\pi/z}\right) dz$$

Solução. Como $z^4 - 16 = 0$ em $\pm 2i$ e ± 2, o primeiro termo do integrando tem pólos simples em $\pm 2i$ dentro de C, com os resíduos [por (4); note que $e^{2\pi i} = 1$]

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right]_{z=2i} = -\frac{1}{16},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right]_{z=-2i} = -\frac{1}{16}$$

e pólos simples em ± 2, que se situam no exterior de C, de modo que não são de interesse aqui. O segundo termo do integrando tem uma singularidade essencial em 0, com o resíduo $\pi^2/2$ conforme obtido de

$$ze^{\pi/z} = z\left(1 + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi^2}{2!z^2} + \frac{\pi^3}{3!z^3} + \cdots\right) = z + \pi + \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \cdots \qquad (|z| > 0).$$

Resp. $2\pi i(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\pi^2) = \pi(\pi^2 - \frac{1}{4})i = 30{,}221i$ pelo teorema dos resíduos. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 16.3

1. Verifique os cálculos no Exemplo 3 e encontre os outros resíduos.

2. Verifique os cálculos no Exemplo 4 e encontre o outro resíduo.

3–12 RESÍDUOS

Encontre todos os pontos singulares e os resíduos correspondentes. (Mostre os detalhes do que fizer.)

3. $\dfrac{1}{4 + z^2}$

4. $\dfrac{\cos z}{z^6}$

5. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^6}$

6. $\dfrac{z^2 + 1}{z^2 - z}$

7. $\cot z$

8. $\sec z$

9. $\dfrac{1}{(z^2 - 1)^2}$

10. $\dfrac{1/3}{z^4 - 1}$

11. $\tan z$

12. $\dfrac{z^2}{z^4 - 1}$

13. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Resíduo num Pólo. Escreva um programa para calcular o resíduo num pólo de qualquer ordem. Use-o para resolver os Problemas 3–8.

14–25 INTEGRAÇÃO POR RESÍDUOS

Calcule o valor (em sentido anti-horário) (Mostre os detalhes.)

14. $\oint_C \frac{\text{sen } \pi z}{z^4}\, dz, \quad C: |z - i| = 2$

15. $\oint_C e^{1/z}\, dz, \quad C: |z| = 1$

16. $\oint_C \frac{dz}{\text{senh } \frac{1}{2}\pi z}, \quad C: |z - 1| = 1{,}4$

17. $\oint_C \tan \pi z\, dz, \quad C: |z| = 1$

18. $\oint_C \tan \pi z\, dz, \quad C: |z| = 2$

19. $\oint_C \frac{e^z}{\cos z}\, dz, \quad C: |z| = 4{,}5$

20. $\oint_C \coth z\, dz, \quad C: |z| = 1$

21. $\oint_C \frac{e^z}{\cos \pi z}\, dz, \quad C: |z - i| = 1{,}5$

22. $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2 - 3iz}\, dz, \quad C: |z| = 1$

23. $\oint_C \frac{\tan \pi z}{z^3}\, dz, \quad C: |z + \frac{1}{2}i| = 1$

24. $\oint_C \frac{1 - 4z + 6z^2}{(z^2 + \frac{1}{4})(2 - z)}\, dz, \quad C: |z| = 1$

25. $\oint_C \frac{30z^2 - 23z + 5}{(2z - 1)^2(3z - 1)}\, dz, \quad C: |z| = 1$

16.4 Integração por Resíduos de Integrais Reais

É bem surpreendente o fato de que certas classes de integrais ***reais*** complicadas possam ser integradas pelo teorema dos resíduos, conforme veremos.

Integrais de Funções Racionais de cos θ e sen θ

Consideremos primeiro as integrais do tipo

$$J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \text{sen } \theta)\, d\theta \tag{1}$$

onde $F(\cos\theta, \text{sen } \theta)$ é uma função racional real de cos θ e sen θ [por exemplo, $(\text{sen}^2\,\theta)/(5 - 4\cos\theta)$] e é finita (não se torna infinita) no intervalo de integração. Fazendo $e^{i\theta} = z$, obtemos

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\,(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
$$\text{sen } \theta = \frac{1}{2i}\,(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{2}$$

Como F é racional em cos θ e sen θ, a Equação (2) mostra que F é agora uma função racional de z, digamos, $f(z)$. Como $dz/d\theta = ie^{i\theta}$, temos que $d\theta = dz/iz$ e a integral dada assume a forma

$$J = \oint_C f(z)\, \frac{dz}{iz} \tag{3}$$

e, como θ varia de 0 a 2π em (1), a variável $z = e^{i\theta}$ percorre uma vez o círculo unitário $|z| = 1$ em sentido anti-horário. (Reveja a Seção 13.5 se necessário.)

EXEMPLO 1 Uma Integral do Tipo (1)

Mostre pelo método presente que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} = 2\pi$.

Solução. Usemos $\cos\theta = (z + 1/z)$ e $d\theta = z/iz$. Então, a integral $\frac{1}{2}$ torna-se

$$\oint_C \frac{dz/iz}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}\,(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)}$$
$$= -\frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}.$$

Vemos que o integrando tem um pólo simples em $z_1 = \sqrt{2} + 1$ fora do círculo unitário C, de modo que esse caso não é de interesse aqui, e outro pólo simples em $z_2 = \sqrt{2} - 1$ (onde $z - \sqrt{2} + 1 = 0$) dentro de C com o resíduo [por (3) da Seção 16.3]

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)} = \left[\frac{1}{z-\sqrt{2}-1}\right]_{z=\sqrt{2}-1}$$
$$= -\frac{1}{2}.$$

Resposta: $2\pi i(-2/i)(-1/2) = 2\pi$. (Aqui, $-2/i$ é o fator em frente à última integral.) ■

Consideremos uma outra classe significativa, a das integrais reais da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Dizemos que uma integral dessas, cujo intervalo de integração não é finito, é uma **integral imprópria**, e ela tem o seguinte significado

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)\,dx. \tag{5′}$$

Se ambos os limites existem, podemos acoplar as duas passagens independentes em $-\infty$ e ∞e escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{5}$$

O limite em (5) é chamado de **valor principal de Cauchy** da integral e é escrito como

$$\text{v. pr.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Ele pode existir mesmo se os limites em (5′) não existirem. *Exemplo:*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right) = 0, \qquad \text{mas} \qquad \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\,dx = \infty.$$

Supomos que a função $f(z)$ em (4) é uma função racional real cujo denominador é diferente de zero para todo x real e que tem um grau correspondente a pelo menos duas unidades acima do grau do numerador. Então, os limites em (5′) existem e podemos começar de (5). Consideremos a integral de contorno correspondente

$$\oint_C f(z)\,dz \tag{5*}$$

ao redor de um caminho C na Fig. 371. Como $f(z)$ é racional, $f(z)$ tem um número finito de pólos no meio-plano superior, e se escolhermos R grande o suficiente, então C encerra todos esses pólos. Pelo teorema dos resíduos, obtemos, então,

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_S f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z)$$

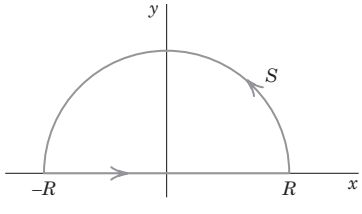


Fig. 371. Caminho *C* da integral de contorno em (5*)

onde a soma consiste em todos os resíduos de $f(z)$ nos pontos do meio-plano superior nos quais $f(z)$ tem um pólo. Disto, temos

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z) - \int_S f(z)\,dz. \tag{6}$$

Provemos que, se $R \to \infty$, o valor da integral sobre o semicírculo S aproxima-se de zero. Se fizermos $z = Re^{i\theta}$, então S é representado por $R = const.$ e, à medida que z varia ao longo de S, a variável θ varia de 0 a π. Uma vez que, por suposição, o grau do denominador de $f(z)$ é pelo menos duas unidades maior que o grau do numerador, temos

$$|f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \qquad (|z| = R > R_0)$$

Para constantes k e R_0 suficientemente grandes. Pela desigualdade *ML* na Seção 14.1,

$$\left|\int_S f(z)\,dz\right| < \frac{k}{R^2}\,\pi R = \frac{k\pi}{R} \qquad (R > R_0).$$

Logo, à medida que R se aproxima do infinito, o valor da integral sobre S aproxima-se de zero, de modo que (5) e (6) fornecem o resultado

(7)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

onde somamos sobre todos os resíduos de $f(z)$ nos pólos de $f(z)$ no meio-plano superior.

EXEMPLO 2 Uma Integral Imprópria de 0 a ∞

Usando (7), mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

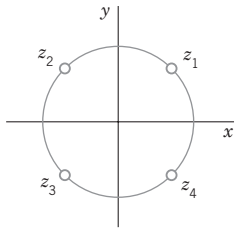


Fig. 372. Exemplo 2

Solução. De fato, $f(z) = 1/(1 + z^4)$ tem quatro pólos simples nos pontos (faça um esboço)

$$z_1 = e^{\pi i/4}, \qquad z_2 = e^{3\pi i/4}, \qquad z_3 = e^{-3\pi i/4}, \qquad z_4 = e^{-\pi i/4}.$$

Os dois primeiros desses pólos situam-se no meio-plano superior (Fig. 372). De (4) da última seção, encontramos os resíduos

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{1}{(1 + z^4)'}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4}\,e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4}\,e^{\pi i/4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{1}{(1 + z^4)'}\right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4}\,e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}\,e^{-\pi i/4}.$$

(Aqui, usamos $e^{\pi i} = -1$ e $e^{-2\pi i} = 1$.) Por (1) da Seção 13.6 e (7) desta seção,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = -\frac{2\pi i}{4}\,(e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}) = -\frac{2\pi i}{4} \cdot 2i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Como $1/(1 + x^4)$ é uma função par, obtemos, portanto, conforme havíamos enunciado,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

■

Integrais de Fourier

O método pelo qual se cria um contorno fechado (Fig. 371) e faz-se a sua "explosão" com o propósito de calcular o valor de (4) pode ser estendido às integrais

(8)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} sx\,dx \qquad (s \text{ real})$$

que ocorrem em conexão com a integral de Fourier (Seção 11.7).

Se $f(z)$ é uma função racional satisfazendo a suposição feita sobre o grau, como para (4), podemos considerar a integral correspondente

$$\oint_C f(z)e^{isz}\,dz \qquad (s \text{ real e positivo})$$

sobre o contorno C na Fig. 371. Em vez de (7), obtemos agora

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\,dx = 2\pi i \sum \text{Res}\,[f(z)e^{isz}] \qquad (s > 0) \tag{9}$$

onde somamos os resíduos de $f(z)e^{isz}$ em seus pólos no meio-plano superior. Igualando as partes reais e imaginárias em ambos os lados de (9), temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx &= -2\pi \sum \text{Im Res}\,[f(z)e^{isz}], \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}\,sx\,dx &= 2\pi \sum \text{Re Res}\,[f(z)e^{isz}]. \end{aligned} \qquad (s > 0) \tag{10}$$

Para estabelecer (9), precisamos mostrar [como para (4)] que o valor da integral sobre o semicírculo S na Fig. 371 aproxima-se de 0 à medida que $R \to \infty$. Ora, $s > 0$ e S situa-se no meio-plano superior $y \geqq 0$. Portanto,

$$|e^{isz}| = |e^{is(x+iy)}| = |e^{isx}|\,|e^{-sy}| = 1 \cdot e^{-sy} \leqq 1 \qquad (s > 0, \quad y \geqq 0).$$

Disto, obtemos a desigualdade $|f(z)e^{isz}| = |f(z)|\,|e^{isz}| \leqq |f(z)| \quad (s > 0, \quad y \geqq 0)$. Isto reduz nosso problema presente ao de (4). Prosseguindo como antes, chegamos a (9) e (10). ■

EXEMPLO 3 Uma Aplicação de (10)

Mostre que $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{k}\,e^{-ks}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\,sx}{k^2 + x^2}\,dx = 0 \qquad (s > 0,\ k > 0).$$

Solução. De fato, $e^{isz}/(k^2 + z^2)$ tem apenas um pólo no meio-plano superior, a saber, um pólo simples em z = ik, e de (4) na Seção 16.3 obtemos

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \left[\frac{e^{isz}}{2z}\right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{2ik}.$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{k^2 + x^2}\,dx = 2\pi i\,\frac{e^{-ks}}{2ik} = \frac{\pi}{k}\,e^{-ks}.$$

Como $e^{isx} = \cos sx + i\,\text{sen}\,sx$, isto produz os resultados anteriores [veja também (15) na Seção 11.7.] ■

Outro Tipo de Integral Imprópria

Consideremos uma integral imprópria

$$\int_A^B f(x)\,dx \tag{11}$$

cujo integrando torna-se infinito num ponto a no intervalo de integração.

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty.$$

Por definição, esta integral (11) significa

$$\int_A^B f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_A^{a-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{a+\eta}^B f(x)\,dx \tag{12}$$

onde ambos ϵ e η aproximam-se de zero de modo independente e a partir de valores positivos. Pode acontecer que nenhum desses limites existam se ϵ e η forem para 0 independentemente, porém o limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_A^{a-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\epsilon}^B f(x)\,dx\right] \tag{13}$$

existe. Este é chamado de **valor principal de Cauchy** da integral e escrito como

$$\text{v. pr.} \int_A^B f(x)\,dx.$$

Por exemplo,

$$\text{v. pr.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^3} \right] = 0;$$

o valor principal existe, embora a própria integral não tenha significado.

No caso de pólos simples sobre o eixo real, obteremos uma fórmula para o valor principal de uma integral de $-\infty$ a ∞. Esta fórmula resultará do teorema a seguir.

TEOREMA 1

Pólos Simples sobre o Eixo Real

Se $f(z)$ tem um pólo simples em $z = a$ sobre o eixo real, então (Fig. 373)

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_2} f(z)\, dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

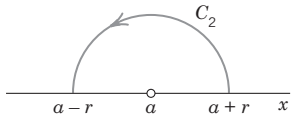


Fig. 373. Teorema 1

PROVA Pela definição de um pólo simples (Seção 16.2), o integrando $f(z)$ tem para $0 < |z - a| < R$ a série de Laurent

$$f(z) = \frac{b_1}{z - a} + g(z), \qquad b_1 = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

Aqui, $g(z)$ é analítica sobre o semicírculo de integração (Fig. 373)

$$C_2: \quad z = a + re^{i\theta}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

e, para todo z entre C_2 e o eixo x, e assim, limitado em C_2, digamos, $|g(z)| \leqq M$. Por integração,

$$\int_{C_2} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} \frac{b_1}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\, d\theta + \int_{C_2} g(z)\, dz = b_1 \pi i + \int_{C_2} g(z)\, dz.$$

A segunda integral no lado direito não pode exceder $M\pi r$ em valor absoluto, pela desigualdade ML (Seção 14.1), e $ML = M\pi r \to 0$ à medida que $r \to 0$. ■

A Fig. 374 mostra a idéia de se aplicar o Teorema 1 para obter o valor principal da integral de uma função racional $f(z)$ de $-\infty$ a ∞. Para R suficientemente grande, a integral sobre todo o contorno na Fig. 374 tem o valor J dado por $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos de $f(z)$ nas singularidades no meio-plano superior. Supomos que $f(z)$ satisfaça à condição do grau imposta em conexão com (4). Então, o valor da integral sobre o grande semicírculo S aproxima-se de 0 quando $R \to \infty$. Para $r \to \infty$, a integral sobre C_2 (no sentido horário!) aproxima-se do valor

$$K = -\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

pelo Teorema 1. Tudo isso junto mostra que o valor principal P da integral de $-\infty$ a ∞ mais K é igual a J; portanto, $P = J - K = J + \pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z)$. Se $f(z)$ tem vários pólos simples sobre o eixo real, então K será $-\pi i$ vezes a soma dos resíduos correspondentes. Logo, a fórmula desejada é

(14)

$$\text{v. pr.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

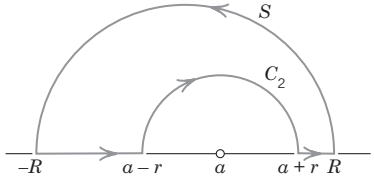


Fig. 374. Aplicação do Teorema 1

onde a primeira soma se estende para todos os pólos no meio-plano superior e a segunda soma para todos os pólos sobre o eixo real, a última sendo simples por suposição.

EXEMPLO 4 Pólos sobre o Eixo Real

Encontre o valor principal

$$\text{v. pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1)}.$$

Solução. Como

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

o integrando $f(z)$, considerado para z complexo, tem pólos simples em

$$z = 1, \qquad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \left[\frac{1}{(z - 2)(z^2 + 1)}\right]_{z=1} = -\frac{1}{2},$$

$$z = 2, \qquad \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \left[\frac{1}{(z - 1)(z^2 + 1)}\right]_{z=2} = \frac{1}{5},$$

$$z = i, \qquad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{1}{(z^2 - 3z + 2)(z + i)}\right]_{z=i} = \frac{1}{6 + 2i} = \frac{3 - i}{20},$$

e em z = $-i$ no meio-plano inferior, o que não tem interesse aqui. De (14), obtemos a resposta

$$\text{v. pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1)} = 2\pi i\left(\frac{3 - i}{20}\right) + \pi i\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{10}.$$ ■

Os problemas propostos apresentam mais integrais do tipo considerado nesta seção. Tente também usar seu computador, que pode algumas vezes lhe dar resultados falsos em integrais complexas.

PROBLEMAS PROPOSTOS 16.4

1–8 INTEGRAIS ENVOLVENDO COSSENOS E SENOS

Calcule o valor das integrais a seguir. (Mostre os detalhes do que fizer.)

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7 + 6\cos\theta}$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{37 - 12\cos\theta}$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{8 - 2\operatorname{sen}\theta}$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\operatorname{sen}\theta}$

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta$

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13 - 12\cos 2\theta}\, d\theta.$

Dica. $\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}\left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)$

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 + 4\cos\theta}{17 - 8\cos\theta}\, d\theta$

9–22 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS : INTERVALO INFINITO DE INTEGRAÇÃO

Calcule o valor (mostrando os detalhes):

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1}\, dx$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16}$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{1 + x^8}\, dx$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4 + 1}\, dx$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1}\, dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x^4 + 1}\, dx$

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$

23–27 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS: PÓLOS SOBRE O EIXO REAL

Encontre o valor principal de Cauchy (mostrando os detalhes):

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{x^3+x}\,dx$

24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+5}{x^3-x}\,dx$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+3x^2-4}$

27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1}$

28. PROJETO DE EQUIPE. Comentários sobre as Integrais Reais. (a) A **fórmula (10)** decorre de (9). Dê os detalhes.

(b) Uso de resultados auxiliares. Integrando e^{-z^2} ao redor do contorno C do retângulo de vértices $-a$, a, $a + ib$, $-a + ib$, fazendo $a \to \infty$, e usando

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

mostre que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-b^2}.$$

(Esta integral é necessária no estudo da condução de calor na Seção 12.6.)

(c) Inspeção. Resolva os Problemas 15 e 21 sem fazer cálculos.

29. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Verifique seu programa. Descubra até que ponto seu programa de álgebra computacional é capaz de calcular corretamente os valores das integrais da forma (1), (4) e (8). Faça isto comparando os resultados da integração direta (que podem vir a ser errados) com os obtidos usando-se resíduos.

30. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Pólos Simples sobre o Eixo Real. Experimente com as integrais $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $f(x) = [(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k)]^{-1}$ a_j reais e todos diferentes, $k > 1$. Conjecture que o valor principal dessas integrais é 0. Tente provar isto para um k especial, digamos, $k = 3$. Para k em geral.

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 16

1. As séries de Laurent são generalizações das séries de Taylor. Explique os detalhes.

2. Pode uma função ter várias séries de Laurent com o mesmo centro? Explique. Se sua resposta for afirmativa, dê exemplos.

3. O que é a parte principal de uma série de Laurent? Qual a sua significância?

4. O que é um pólo? Uma singularidade essencial? Dê exemplos.

5. Qual é o teorema de Picard? Por que ele surgiu neste capítulo?

6. O que é a esfera riemanniana? O plano complexo estendido? Sua significância?

7. e^{1/z^2} é analítica ou singular no infinito? $\cosh z$? $(z - 4)^3$? Explique.

8. O que é resíduo? Por que ele é importante?

9. Enuncie de memória as fórmulas para os resíduos.

10. Enuncie mais alguns métodos para calcular resíduos.

11. O que é a integração por resíduos? A que tipos de integrais complexas ela se aplica?

12. Por qual idéia podemos aplicar integração por resíduos a integrais reais de $-\infty$ a ∞? Dê exemplos simples.

13. O que é um zero de uma função analítica? Como os zeros são classificados?

14. O que são as integrais impróprias? Os valores principais de Cauchy? Dê exemplos.

15. Pode o resíduo num ponto singular ser 0? Num pólo simples?

16. O que é uma função meromórfica? Uma função inteira? Dê exemplos.

17–28 INTEGRAIS COMPLEXAS

Integre no sentido anti-horário ao redor de C. (Mostre os detalhes.)

17. $\dfrac{\tan z}{z^4}$, C: $|z| = 1$

18. $\dfrac{\operatorname{sen} 2z}{z^4}$, C: $|z| = 1$

19. $\dfrac{10z}{2z + i}$, C: $|z - 2i| = 3$

20. $\dfrac{iz + 1}{z^2 - iz + 2}$, C: $|z - 1| = 3$

21. $\dfrac{\cosh 5z}{z^2 + 4}$, C: $|z - i| = 2$

22. $\dfrac{4z^3 + 7z}{\cos z}$, C: $|z + 1| = 1$

23. $\cot 8z$, C: $|z| = 0{,}2$

24. $\dfrac{z^2 \operatorname{sen} z}{4z^2 - 1}$, C: $|z - 1| = 2$

25. $\dfrac{\cos z}{z^n}$, $n = 1, 2, \cdots$, C: $|z| = 1$

26. $\dfrac{z^2 + 1}{z^2 - 2z}$, C: $\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$

27. $\dfrac{15z + 9}{z^3 - 9z}$, C: $|z - 3| = 2$

28. $\dfrac{15z + 9}{z^3 - 9z}$, C: $|z| = 4$

29–35 INTEGRAIS REAIS

Calcule o valor pelos métodos apresentados neste capítulo (mostrando os detalhes):

29. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25 - 24\cos\theta}$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k + \cos\theta}$, $k > 1$

31. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta}$

32. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{3 + \cos\theta}\,d\theta$

33. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

34. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

35. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1+2x^2}{1+4x^4}\,dx$

36. Obtenha a resposta do Problema 18 da Seção 16.4 usando o presente Problema 35.

RESUMO DO CAPÍTULO 16
Séries de Laurent. Integração por Resíduos

Uma **série de Laurent** é uma série da forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{1}$$ (Seção 16.1)

ou, mais sucintamente escrita [embora isso tenha o mesmo significado de (1)!]

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}\,dz^* \tag{1*}$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Esta série converge num espaço anular aberto (anel) A de centro z_0. Em A, a função $f(z)$ é analítica. Em pontos que não estejam em A, ela pode apresentar singularidades. A primeira série em (1) é uma série de potências. Num espaço anular dado, uma série de Laurent de $f(z)$ é única, mas $f(z)$ pode ter diferentes séries de Laurent em espaços anulares diferentes mas de mesmo centro.

De importância particular é a série de Laurent (1) que converge numa vizinhança de z_0 exceto no próprio z_0, digamos, para $0 < |z - z_0| < R$ ($R > 0$, adequado). A série (ou a soma finita) das potências negativas nesta série de Laurent é chamada de **parte principal** de $f(z)$ em z_0. O coeficiente b_1 de $1/(z - z_0)$ nesta série é chamado de **resíduo** de $f(z)$ em z_0 e é dado por [veja (1) e (1*)]

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z^*)\,dz^*. \quad \text{Portanto,} \quad \oint_C f(z^*)\,dz^* = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z). \tag{2}$$

b_1 pode ser usado na **integração**, como se mostrou em (2), visto que pode ser obtido de

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right), \tag{3}$$ (Seção 16.3)

desde que $f(z)$ tenha em z_0 um **pólo de ordem *m***; por definição, isto significa que essa parte principal tem $1/(z - z_0)^m$ como sua potência negativa mais elevada. Assim, para um pólo simples ($m = 1$),

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z); \quad \text{também,} \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Se a parte principal é uma série infinita, a singularidade de $f(z)$ em z_0 é chamada de **singularidade essencial** (Seção 16.2).

A Seção 16.2 também discute o *plano complexo estendido*, ou seja, o plano complexo com um ponto impróprio ∞ ("infinito") agregado.

A integração por resíduos também pode ser usada no cálculo de valores de certas classes de integrais reais complicados (Seção 16.4).

CAPÍTULO 17

Mapeamento Conforme

Se uma função complexa $w = f(z)$ é definida num domínio D do plano z, então a cada ponto em D há um ponto correspondente no plano w. Dessa forma, obtemos um **mapeamento** de D sobre o conjunto de valores de $f(z)$ no plano w. Veremos que, se $f(z)$ for uma função *analítica*, então o mapeamento dado por $w = f(z)$ é **conforme** (preserva os ângulos), excetuando-se nos pontos onde a derivada $f'(z)$ é nula.

A conformidade é um assunto que surgiu desde cedo na história, relacionado à elaboração de mapas do globo terrestre, que podem ser conformes (ou seja, capazes de fornecer corretamente as direções), ou "eqüiárea" (ou seja, capazes de fornecer as áreas corretamente, a menos de um fator de escala), porém não podem ter ambas as propriedades, como é possível demonstrar (veja [RG8] no Apêndice 1).

A conformidade é a propriedade geométrica mais importante das funções analíticas, que possibilita a adoção de uma abordagem geométrica na análise complexa. Com efeito, do mesmo modo que no cálculo, onde usamos curvas de funções reais $y = f(x)$ para estudar as propriedades "geométricas" das funções, na análise complexa podemos utilizar os mapeamentos conformes para adquirir uma compreensão mais aprofundada das propriedades das funções, notavelmente das que discutimos no Capítulo 13.

Com efeito, primeiro definiremos os conceitos de mapeamento conforme e então consideraremos os mapeamentos das funções analíticas elementares vistas no Capítulo 13.

Este é um dos propósitos deste capítulo. Um segundo propósito, de maior importância para os engenheiros e físicos, é a utilização do mapeamento conforme em conexão com os problemas de potencial. Com efeito, neste capítulo e no seguinte, veremos que o mapeamento conforme fornece um método-padrão para resolver **problemas de valores de contorno** na teoria do potencial (bidimensional), pela transformação de uma região complicada numa região mais simples. Aplicações correspondentes tratarão de problemas em eletrostática, condução do calor e escoamento de fluidos.

Na última seção (17.5), explicaremos o conceito de **superfície riemanniana**, bastante adequado à discussão que estaremos fazendo dessas idéias "geométricas".

Pré-requisito: Capítulo 13.
Seções que podem ser omitidas num curso mais curto: 17.3 e 17.5.
Referências e Respostas dos Problemas: Parte D do Apêndice 1 e Apêndice 2.

17.1 Geometria das Funções Analíticas: Mapeamento Conforme

Uma função complexa

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (z = x + iy) \tag{1}$$

de uma variável complexa z fornece um **mapeamento** de seu domínio de definição D no plano complexo z ***para*** o plano complexo w ou ***sobre*** seu conjunto de valores nesse plano.[1] Para cada ponto z_0 em D, o ponto $w_0 = f(z_0)$ é chamado de **imagem** de z_0 em relação a f. De modo mais geral, para os pontos de uma curva C em D, os pontos da imagem formam a **imagem** de C; algo similar ocorre para outros conjuntos pontuais em D. Além disso, ao invés de dizermos *o mapeamento por uma função* $w = f(z)$, diremos de modo mais abreviado ***o mapeamento*** $\boldsymbol{w = f(z)}$.

[1]A terminologia geral é a seguinte. O mapeamento de um conjunto A para um conjunto B é chamado de **sobrejetor**, ou um mapeamento de A **sobre** B, se cada elemento de B for a imagem de pelo menos um elemento de A. E é chamado de **injetor** ou de **um a um** se diferentes elementos de A tiverem diferentes imagens em B. Finalmente, é chamado de **bijetor** se for ao mesmo tempo sobrejetor e injetor.

EXEMPLO 1 **Mapeando $w = f(z) = z^2$**

Usando as formas polares $z = re^{i\theta}$ e $w = Re^{i\phi}$, temos $w = z^2 = r^2e^{2i\theta}$. Comparando os módulos e os argumentos, temos $R = r^2$ e $\phi = 2\theta$. Logo, os círculos $r = r_0$ são mapeados sobre os círculos $R = {r_0}^2$ e os raios $\theta = \theta_0$, sobre os raios $\phi = 2\theta_0$. A Fig. 375 mostra isso para a região $1 \leqq |z| \leqq 3/2$, $\pi/6 \leqq \theta \leqq \pi/3$, que é mapeada sobre a região $1 \leqq |w| \leqq 9/4$, $\pi/3 \leqq \theta \leqq 2\pi/3$.

Em coordenadas cartesianas, temos $z = x + iy$ e

$$u = \text{Re}\,(z^2) = x^2 - y^2, \qquad v = \text{Im}\,(z^2) = 2xy.$$

Logo, as linhas verticais $x = c = const.$ são mapeadas sobre $u = c^2 - y^2$, $v = 2cy$. A partir disso, podemos eliminar y. Obtemos $y^2 = c^2 - u$ e $v^2 = 4c^2y^2$. Juntando essas expressões,

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u) \qquad \text{(Fig. 376).}$$

Essas parábolas abrem-se para a esquerda. Similarmente, as linhas horizontais $y = k = const.$ são mapeadas sobre parábolas abrindo-se para a direita,

$$v^2 = 4k^2(k^2 + u) \qquad \text{(Fig. 376).}$$ ■

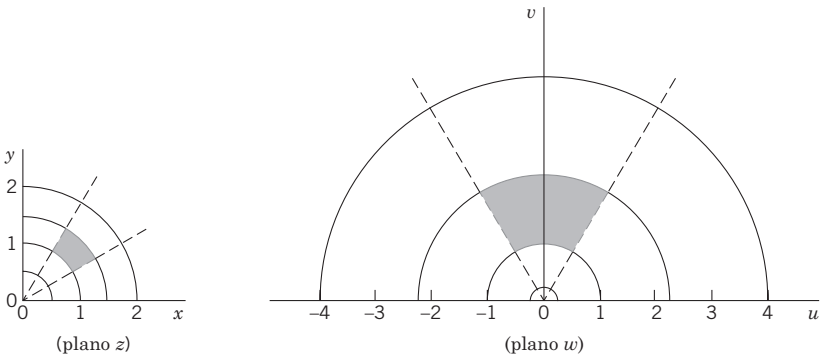


Fig. 375. Mapeamento de $w = z^2$. Linhas $|z| = const.$, arg $z = const.$ e suas imagens no plano w

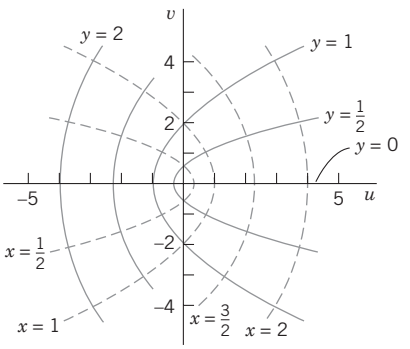


Fig. 376. Imagens de $x = const.$, $y = const.$ sob $w = z^2$

Mapeamento Conforme

Um mapeamento $w = f(z)$ é chamado de **conforme** se ele preserva os ângulos entre as curvas orientadas, tanto em magnitude quanto em sentido. A Fig. 377 mostra o que isso significa. O **ângulo** α $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ entre duas curvas C_1 e C_2 que se interceptam é definido como o ângulo entre suas tangentes orientadas no ponto de interseção z_0. E pela *conformidade*, entende-se que as imagens C_1^* e C_2^* de C_1 e C_2 formam o mesmo ângulo que as próprias curvas, tanto em magnitude quanto em direção.

TEOREMA 1

Conformidade do Mapeamento por Funções Analíticas

O mapeamento $w = f(z)$ por uma função analítica f é conforme, excetuando-se nos **pontos críticos**, *ou seja, pontos nos quais a derivada f' é nula.*

PROVA $w = z^2$ possui um ponto crítico em $z = 0$, onde $f'(z) = 2z = 0$ e os ângulos ficam duplicados (veja a Fig. 375), de modo que a conformidade não se verifica.

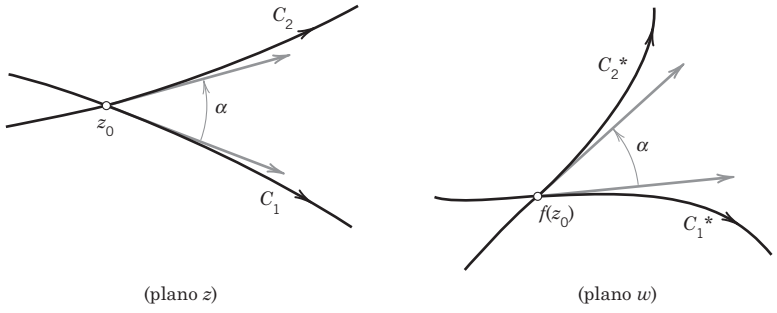


Fig. 377. Curvas C_1 e C_2 e suas respectivas imagens C_1^* e C_2^* sob um mapeamento conforme $w = f(z)$

A idéia da prova é considerar uma curva

$$C\colon z(t) = x(t) + iy(t) \tag{2}$$

no domínio de $f(z)$ e mostrar que $w = f(z)$ provoca uma rotação de todas as tangentes num ponto z_0 (onde $f'(z_0) \neq 0$) de um mesmo ângulo. Agora, $\dot{z}(t) = dz/dt = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ é tangente a C em (2), pois este é o limite de $(z_1 - z_0)/\Delta t$ (que tem a direção da secante $z_1 - z_0$ na Fig. 378) à medida que z_1 se aproxima de z_0 ao longo de C. A imagem C^* de C é $w = f(z(t))$. Pela regra da cadeia, $\dot{w} = f'(z(t))\dot{z}(t)$. Logo, a direção tangente de C^* é dada pelo argumento (use (9) da Seção 13.2)

$$\arg \dot{w} = \arg f' + \arg \dot{z} \tag{3}$$

onde o arg $\dot{z}$ fornece a direção tangente de C. Isso mostra que o mapeamento faz uma rotação de *todas* as direções num ponto z_0 no domínio da analiticidade de f, rotação esta de um mesmo ângulo arg $f'(z_0)$, que existe desde que $f'(z_0) \neq 0$. Mas isso significa conformidade, como ilustra a Fig. 377 para um ângulo α entre duas curvas, cujas imagens C_1^* e C_2^* formam o mesmo ângulo (devido à rotação). ■

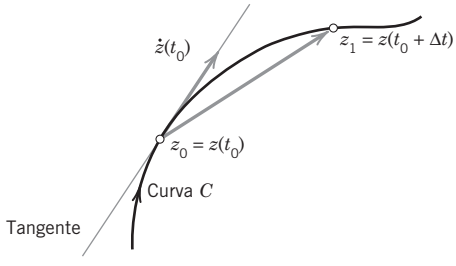


Fig. 378. Secante e tangente da curva C

No restante desta seção e nas próximas, consideraremos diversos mapeamentos conformes que são de interesse prático, por exemplo, na modelagem de problemas de potencial.

EXEMPLO 2 Conformidade de $w = z^n$

O mapeamento $w = z^n$, $n = 2, 3, \cdots$ é conforme, excetuando-se em $z = 0$, onde $w' = nz^{n-1} = 0$. Para $n = 2$, isso é mostrado na Fig. 375; vemos que, em 0, os ângulos são duplicados. Para um valor geral de n, com o mapeamento, os ângulos em 0 são multiplicados por um fator n. Logo, o setor $0 \leqq \theta \leqq \pi/n$ é mapeado por z^n sobre o meio-plano superior $v \geqq 0$ (Fig. 379). ■

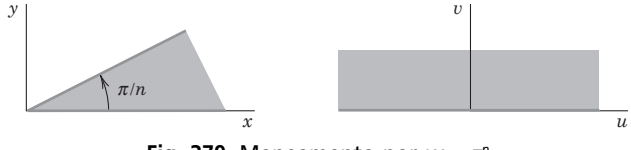


Fig. 379. Mapeamento por $w = z^n$

EXEMPLO 3 Mapeamento de $w = z + 1/z$. Aerofólio de Joukowski

Em coordenadas polares, esse mapeamento é

$$w = u + iv = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

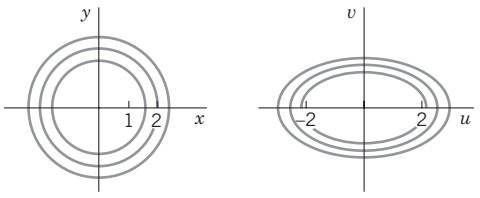


Fig. 380. Exemplo 3

Separando as partes reais e imaginárias, obtemos, portanto,

$$u = a\cos\theta, \qquad v = b\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{onde} \qquad a = r + \frac{1}{r}, \quad b = r - \frac{1}{r}.$$

Logo, os círculos $|z| = r = const. \neq 1$ são mapeados sobre elipses $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. O círculo $r = 1$ é mapeado sobre o segmento $-2 \leqq u \leqq 2$ do eixo u. Veja a Fig. 380.

Agora, a derivada de w é

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

que é 0 em $z = \pm 1$. Esses são os pontos nos quais o mapeamento não é conforme. Os dois círculos da Fig. 381 passam por $z = -1$. O círculo maior é mapeado sobre um *aerofólio de Joukowski*. O círculo tracejado passa tanto por –1 quanto por 1, sendo mapeado sobre um segmento curvo.

Outra interessante aplicação de $w = z + 1/z$ (o escoamento em torno de um cilindro) será considerada na Seção 18.4. ■

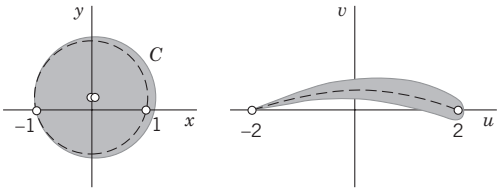


Fig. 381. Aerofólio de Joukowski

EXEMPLO 4 Conformidade de $w = e^z$

De (10) da Seção 13.5, temos $|e^z| = e^x$ e Arg $z = y$. Logo, e^z mapeia uma linha reta vertical $x = x_0 = const.$ sobre o círculo $|w| = e^{x_0}$ e uma linha reta horizontal $y = y_0 = const.$ sobre o raio arg $w = y_0$. O retângulo na Fig. 382 é mapeado sobre uma região delimitada por círculos e raios, conforme o mostrado.

A região fundamental $-\pi <$ Arg $z \leqq \pi$ de e^z no plano z é mapeada bijetiva e conformemente sobre todo o plano w sem a origem $w = 0$ (porque não há z para o qual $e^z = 0$). A Fig. 383 mostra que a metade superior $0 < y \leqq \pi$ da região fundamental é mapeada sobre o meio-plano superior $0 <$ arg $w \leqq \pi$, com a metade esquerda sendo mapeada dentro do disco unitário $|w| \leqq 1$ e a metade direita no lado externo (por quê?). ■

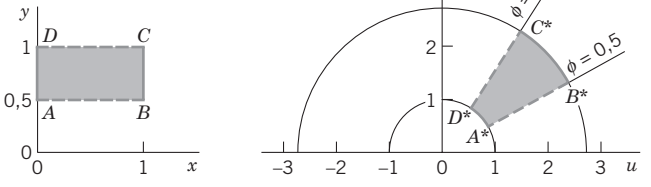


Fig. 382. Mapeamento por $w = e^z$

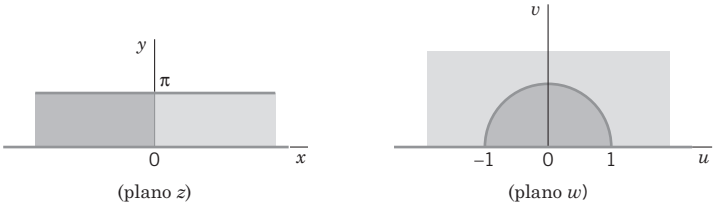


Fig. 383. Mapeamento por $w = e^z$

EXEMPLO 5 O Princípio do Mapeamento Inverso. Mapeando $w = \text{Ln}\, z$

Princípio. *O mapeamento da função inversa $z = f^{-1}(w)$ de $w = f(z)$ é obtido trocando-se os papéis dos planos z e w no mapeamento por $w = f(z)$.*

Agora, o valor principal $w = f(z) = \text{Ln}\, z$ do logaritmo natural possui o mapeamento inverso $z = f^{-1}(w) = e^w$. Do Exemplo 4 (com as notações z e w trocadas!), sabemos que $f^{-1}(w) = e^w$ mapeia a região fundamental da função exponencial sobre o plano z, excluindo-se $z = 0$ (uma vez que, para todo w, $e^w \neq 0$). Logo, $w = f(z) = \text{Ln}\, z$ mapeia o plano z sem a origem e faz um corte ao longo do eixo real negativo (onde $\theta = \text{Im Ln}\, z$ apresenta um salto de 2π) conformemente sobre a faixa horizontal $-\pi < v \leqq \pi$ do plano w, onde $w = u + iv$.

Uma vez que o mapeamento de $w = \text{Ln}\, z + 2\pi i$ difere de $w = \text{Ln}\, z$ pela translação $2\pi i$ (verticalmente para cima), essa função mapeia o plano z (com o mesmo corte de antes e o 0 omitido) sobre a faixa $\pi < v \leqq 3\pi$. Algo similar ocorre com cada um dos infinitos mapeamentos $w = \ln z = \text{Ln}\, z \pm 2n\pi i$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$). As faixas horizontais correspondentes e de largura 2π (imagens do plano z sob esses mapeamentos) cobrem juntas, sem se sobreporem, todo o plano w. ■

Razão de Aumento. Pela definição de derivada, temos

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|. \tag{4}$$

Portanto, o mapeamento $w = f(z)$ aumenta (ou diminui) os comprimentos das linhas curtas por um fator aproximado de $|f'(z_0)|$. A imagem de cada uma das pequenas figuras ***conforma-se*** à figura original, no sentido em que ela tem aproximadamente a mesma forma. Entretanto, uma vez que $f'(z)$ varia de ponto a ponto, uma figura *grande* pode ter uma imagem cuja forma seja bastante diferente da forma da figura original.

Mais sobre a Condição $f'(z) \neq 0$. De (4) da Seção 13.4 e das equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$|f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5'}$$

ou seja,

$$|f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} . \tag{5}$$

Esse determinante é o chamado **jacobiano** (Seção 10.3) da transformação $w = f(z)$ escrita na forma real $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Logo, $f'(z_0) \neq 0$ implica que o jacobiano não vale 0 em z_0. Essa condição é suficiente para que, numa vizinhança de z_0 suficientemente pequena, o mapeamento de $w = f(z)$ seja um a um ou injetor (onde pontos diferentes têm imagens diferentes). Veja a Ref. [RG4] no Apêndice 1.

PROBLEMAS PROPOSTOS 17.1

1. Verifique todos os cálculos do Exemplo 1.

2. Por que, sob um mapeamento por uma função analítica $f(z)$, as imagens das curvas $|z| = const.$ e arg $z = const.$ fazem interseções em ângulos retos, excetuando-se nos pontos onde $f'(z) = 0$?

3. O mapeamento $w = \bar{z} = x - iy$ preserva os tamanhos dos ângulos, além de preservar seus sentidos?

4–6 MAPEAMENTO DE CURVAS

Obtenha e faça um esboço ou gráfico da imagem das curvas dadas, segundo o mapeamento indicado.

4. $x = 1, 2, 3, 4$, $y = 1, 2, 3, 4$; $w = z^2$

5. Curvas como no Problema. 4, $w = iz$ **(Rotação)**

6. $|z| = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$; Arg $z = 0, \pm\pi/4, \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm\pi$; $w = 1/z$

7–15 MAPEAMENTO DE REGIÕES

Obtenha e faça um esboço ou gráfico da imagem das curvas dadas, segundo o mapeamento indicado.

7. $-\pi/4 < \text{Arg } z < \pi/4$, $|z| < 1/2$, $w = z^3$

8. $x \geqq 1$, $w = 1/z$

9. $|z| > 1$, $w = 3z$

10. Im $z > 0$, $w = 1 - z$

11. $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $|z| \leqq 4$; $w = z^2$

12. $-1 \leqq x \leqq 1$, $-\pi < y < \pi$; $w = e^z$

13. $\ln 3 < x < \ln 5$, $w = e^z$

14. $-\pi < y \leqq 3\pi$, $w = e^z$

15. $2 \leqq |z| \leqq 3$, $\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/2$; $w = \text{Ln } z$

16. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Redes Ortogonais. Represente graficamente a rede ortogonal das duas famílias de curvas de nível Re $f(z) = const$ e Im $f(z) = const$, onde (a) $f(z) = z^4$, (b) $f(z) = 1/z$, (c) $f(z) = 1/z^2$, (d) $f(z) = (z + i)/(1 + iz)$. Por que essas curvas geralmente se interceptam em ângulos retos? Em seu trabalho, faça experiências para obter os melhores gráficos possíveis. Faça também o mesmo para outras funções de sua própria escolha. Observe e registre as limitações do programa de álgebra computacional que você utilizar, bem como os possíveis meios para suplantar essas deficiências.

17–23 FALHA DE CONFORMIDADE

Encontre todos os pontos nos quais os seguintes mapeamentos não são conformes.

17. $z(z^4 - 5)$

18. $z^2 + 1/z^2$

19. $\cos \pi z$

20. $\cosh 2z$

21. $z^2 + az + b$

22. $\exp (z^5 - 80z)$

23. $(z - a)^3$, $(z^3 - a)^2$

24–28 RAZÃO DE AUMENTO, JACOBIANO

Encontre a razão de aumento M. Descreva o que ela lhe informa sobre o mapeamento. Onde M é igual a 1? Encontre o jacobiano J.

24. $w = \frac{1}{2}z^2$

25. $w = e^z$

26. $w = z^3$

27. $w = \text{Ln } z$

28. $w = 1/z$

29. Aumento dos Ângulos. Considere que $f(z)$ seja analítica em z_0. Suponha que $f'(z_0) = 0, \cdots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$. Então, o mapeamento $w = f(z)$ aumenta por um fator k os ângulos com vértice em z_0. Ilustre isso com exemplos para $k = 2, 3, 4$.

30. Prove o enunciado do Problema. 29 para um valor geral $k = 1, 2, \cdots$. *Sugestão*: use séries de Taylor.

17.2 Transformações Lineares Fracionárias

Os mapeamentos conformes podem ser úteis na modelagem e na resolução de problemas de valor de contorno, pois com eles é possível primeiro mapear conformemente uma região sobre outra. Explicaremos isso para regiões-padrão (discos, meios-planos, faixas) na próxima seção. Para tanto, é útil conhecer as propriedades dos mapeamentos básicos especiais. Dessa forma, começaremos com a seguinte classe, que é de grande importância.

As **transformações lineares fracionárias** (ou **transformações de Möbius**) são os mapeamentos

$$\textbf{(1)} \qquad w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

onde a, b, c, d são números complexos ou reais. Derivando, obtemos

$$(2) \qquad w' = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Este é o motivo de nossa exigência $ad - bc \neq 0$. Isso também implica conformidade para todo z e definitivamente exclui o caso $w' \equiv 0$, que não tem qualquer interesse. Os casos especiais de (1) são

$$(3) \qquad \begin{array}{ll} w = z + b & (\textit{Translações}) \\ w = az \quad \text{com } |a| = 1 & (\textit{Rotações}) \\ w = az + b & (\textit{Transformações lineares}) \\ w = 1/z & (\textit{Inversão no círculo unitário}). \end{array}$$

EXEMPLO 1 **Propriedades da Inversão $w = 1/z$ (Fig. 384)**

Nas formas polares $z = re^{i\theta}$ e $w = Re^{i\phi}$, a inversão $w = 1/z$ é

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \qquad \text{e fornece} \qquad R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta.$$

Logo, o círculo unitário $|z| = r = 1$ é mapeado sobre o círculo unitário $|w| = R = 1$; $w = e^{i\phi} = e^{-i\theta}$. Para um z geral, a imagem $w = 1/z$ pode ser obtida geometricamente marcando-se $|w| = R = 1/r$ sobre o segmento de 0 a z e então promovendo-se uma reflexão dessa marca no eixo real. (Faça um esboço disso.)

A Fig. 384 mostra que $w = 1/z$ faz um mapeamento de linhas retas horizontais e verticais sobre círculos ou linhas retas. E o seguinte enunciado também se verifica.

$w = 1/z$ mapeia toda linha reta ou círculo sobre um círculo ou uma linha reta.

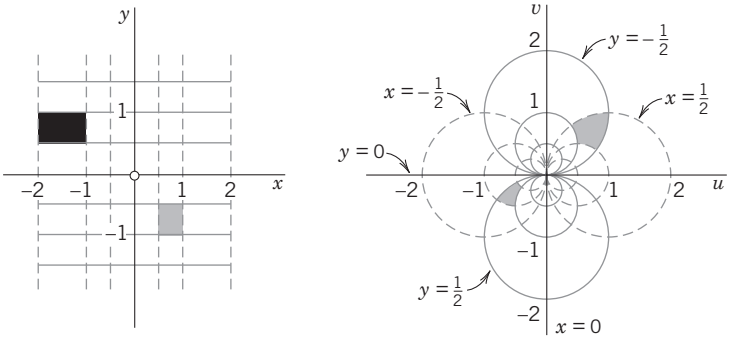


Fig. 384. Mapeamento (inversão) $w = 1/z$

Prova. Toda linha reta ou círculo no plano z pode ser escrito como

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (A, B, C, D \text{ reais}).$$

$A = 0$ fornece uma linha reta e $A \neq 0$ fornece um círculo. Em termos de z e $\bar{z}$, essa equação torna-se

$$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0.$$

Agora, $w = 1/z$. Fazendo a substituição $z = 1/w$ e multiplicando por $w\bar{w}$, chegamos à equação

$$A + B\frac{\bar{w} + w}{2} + C\frac{\bar{w} - w}{2i} + Dw\bar{w} = 0$$

ou, em termos de u e v,

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0.$$

Isso representa um círculo (se $D \neq 0$) ou uma linha reta (se $D = 0$) no plano w. ■

Neste exemplo, a prova sugere a utilização de z e $\bar{z}$ no lugar de x e y, um **princípio geral** que é freqüentemente de grande utilidade prática.

Surpreendentemente, *toda* transformação linear fracionária possui a propriedade que acabamos de provar:

TEOREMA 1

Círculos e Linhas Retas

Toda transformação linear fracionária (1) *mapeia a totalidade de círculos e linhas retas no plano z sobre a totalidade de círculos e linhas retas no plano w.*

PROVA Isso é trivial para uma translação ou rotação, razoavelmente óbvio para uma expansão ou contração uniforme, e verdadeiro para $w = 1/z$, conforme acabamos de provar. Logo, isso também se verifica para composições formadas desses mapeamentos especiais. Agora, vem a idéia-chave da prova: representar (1) em termos desses mapeamentos especiais. Quando $c = 0$, isso é fácil. Quando $c \neq 0$, a representação é

$$w = K\frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} \qquad \text{onde} \qquad K = -\frac{ad - bc}{c}.$$

Podemos verificar isso substituindo K, tomando o denominador comum e simplificando, chegando assim a (1). Podemos agora fazer

$$w_1 = cz, \qquad w_2 = w_1 + d, \qquad w_3 = \frac{1}{w_2}, \qquad w_4 = Kw_3,$$

e verificar, com base na fórmula anterior, que $w = w_4 + a/c$. Isso nos diz que (1) é, com efeito, uma composição desses mapeamentos especiais, o que completa a prova. ■

Plano Complexo Estendido

Temos agora uma motivação muito mais natural para manipular o plano complexo estendido (ou seja, o plano complexo incluindo o ponto ∞ na Seção 16.2) por meio de transformações lineares fracionárias, do seguinte modo.

A cada z para o qual $cz + d \neq 0$ corresponde um único w em (1). Consideremos agora $c \neq 0$. Então, para $z = -d/c$, temos $cz + d = 0$, de modo que não há nenhum w correspondente a esse z. Isso sugere que façamos $w = \infty$ como a imagem de $z = -d/c$.

Além disso, o **mapeamento inverso** de (1) é obtido resolvendo-se (1) para z; isso de novo fornece uma transformação linear fracionária

(4)
$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Quando $c \neq 0$, então $cw - a = 0$ para $w = a/c$, e fazemos que a/c seja a imagem de $z = \infty$. Com esses arranjos, a transformação linear fracionária (1) passa agora a ser um mapeamento injetor do plano estendido z sobre o plano estendido w. Também podemos dizer que toda transformação linear fracionária mapeia "de forma injetora o plano complexo estendido sobre si mesmo".

Nossa discussão sugere o seguinte.

Observação Geral. Se $z = \infty$, então o lado direito de (1) torna-se a expressão sem sentido $(a \cdot \infty + b)/(c \cdot \infty + d)$. Atribuímos a ela o valor $w = a/c$ se $c \neq 0$ e $w = \infty$ se $c = 0$.

Pontos Fixos

Os **pontos fixos** de um mapeamento $w = f(z)$ correspondem aos pontos que são mapeados sobre si mesmos, sendo "mantidos fixos" no mapeamento. Portanto, eles são obtidos de

$$w = f(z) = z.$$

No **mapeamento identidade** $w = z$, cada ponto é um ponto fixo. O mapeamento $w = \bar{z}$ possui um número infinitamente grande de pontos fixos, $w = 1/z$ possui dois, uma rotação possui um, e uma translação, nenhum, no plano finito. (Encontre esses pontos em cada caso.) Para (1), a condição de ponto fixo $w = z$ é

$$(5) \qquad z = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \text{portanto,} \qquad cz^2 - (a - d)z - b = 0.$$

Esta é uma equação quadrática em z cujos coeficientes desaparecem todos se e somente se o mapeamento for o mapeamento identidade $w = z$ (neste caso, $a = d \neq 0$, $b = c = 0$). Logo, temos o

TEOREMA 2 **Pontos Fixos**

Uma transformação linear fracionária, que não seja a identidade, possui no máximo dois pontos fixos. Caso se saiba que uma transformação linear fracionária possui três ou mais pontos fixos, ela é necessariamente o mapeamento identidade $w = z$.

Para darmos à nossa discussão geral das transformações lineares fracionárias uma utilidade prática ainda maior, faremos extensões delas para outros fatos e exemplos típicos, tanto nos problemas propostos nesta seção, quanto nos da próxima.

PROBLEMAS PROPOSTOS 17.2

1. Verifique os cálculos da prova do Teorema 1.

2. (Composição de TLFs) Mostre que, substituindo-se uma transformação linear fracionária (TLF) numa TLF chega-se a uma TLF.

3. (Matrizes) Se você estiver familiarizado com as matrizes 2×2, prove que as matrizes dos coeficientes de (1) e (4) são inversas uma da outra, desde que $ad - bc = 1$, e que a composição das TLFs corresponde à multiplicação das matrizes dos coeficientes.

4–7 INVERSOS

Encontre o mapeamento inverso $z = z(w)$. Verifique o resultado, resolvendo $z(w)$ para w.

4. $w = \dfrac{4z + i}{-3iz + 1}$

5. $w = \dfrac{3z}{2z - i}$

6. $w = \dfrac{z + i}{z - i}$

7. $w = \dfrac{2z + 5i}{4z}$

8–14 PONTOS FIXOS

Encontre os pontos fixos.

8. $w = 81z^5$

9. $w = (4 + i)z$

10. $w = z + 4i$

11. $w = (z - i)^2$

12. $w = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

13. $w = \dfrac{2iz - 1}{z + 2i}$

14. $w = \dfrac{3z + 2}{z - 1}$

15. Encontre uma TLF cujos (únicos) pontos fixos sejam –2 e 2.

16. Encontre uma TLF (diferente de $w = z$) com os pontos fixos 0 e 1.

17. Encontre todas as TLFs que tenham os pontos fixos –1 e 1.

18. Encontre todas as TLFs cujo único ponto fixo seja 0.

19. Encontre todas as TLFs que tenham os pontos fixos 0 e ∞.

20. Encontre todas as TLFs que não tenham pontos fixos no plano finito.

17.3 Transformações Lineares Fracionárias Especiais

Nesta seção, veremos como determinar as transformações lineares fracionárias

$$(1) \qquad w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

para mapear certos domínios-padrão sobre outros, e também como discutir as propriedades de (1).

Um mapeamento (1) é determinado por a, b, c, d, ou melhor dizendo, pelas razões entre três dessas constantes e a quarta, pois é possível eliminar ou introduzir um fator comum. Isso possibilita que as três condições determinem um mapeamento único (1):

TEOREMA 1 **Três Pontos com Suas Imagens Dadas**

Três pontos distintos dados z_1, z_2, z_3 podem sempre ser mapeados sobre três pontos distintos prescritos w_1, w_2, w_3 por meio de uma, e somente uma, transformação linear fracionária $w = f(z)$. Esse mapeamento é dado implicitamente pela equação

(2)
$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

(*Se um desses pontos for o ponto ∞, o quociente das duas diferenças contendo esse ponto precisa ser substituído por* 1.)

PROVA A Equação (2) é da forma $F(w) = G(z)$ com F e G sendo transformações lineares fracionárias. Logo, $w = F^{-1}(G(z)) = f(z)$ onde F^{-1} é a inversa de F e é uma função transformação linear fracionária (veja (4) da Seção 17.2), o mesmo ocorrendo com a composição $F^{-1}(G(z))$ (pelo Problema 21), ou seja, $w = f(z)$ é linear fracionária. Agora, se em (2) fizermos $w = w_1, w_2, w_3$ no lado esquerdo e $z = z_1, z_2, z_3$ no lado direito, veremos que

$$F(w_1) = 0, \quad F(w_2) = 1, \quad F(w_3) = \infty$$
$$G(z_1) = 0, \quad G(z_2) = 1, \quad G(z_3) = \infty.$$

Da primeira coluna, $F(w_1) = G(z_1)$, portanto, $w_1 = F^{-1}(G(z_1)) = f(z_1)$. Similarmente, $w_2 = f(z_2)$, $w_3 = f(z_3)$. Isso prova a existência da transformação linear fracionária que desejávamos.

Para provarmos a unicidade, consideremos que $w = g(z)$ seja uma transformação linear fracionária, que também mapeia z_j sobre w_j, $j = 1, 2, 3$. Portanto, $w_j = g(z_j)$. Logo, $g^{-1}(w_j) = z_j$, onde $w_j = f(z_j)$. Juntas, $g^{-1}(f(z_j)) = z_j$, um mapeamento com os três pontos fixos z_1, z_2, z_3. Pelo Teorema 2 da Seção 17.2 este é o mapeamento identidade, $g^{-1}(f(z)) = z$ para todo z. Portanto, $f(z) = g(z)$ para todo z, de modo que temos a unicidade.

A última parte do enunciado do Teorema 1 decorre da Observação Geral da Seção 17.2. ■

Mapeamento dos Domínios-padrão pelo Teorema 1

Utilizando o Teorema 1, podemos agora encontrar transformações lineares fracionárias de acordo com o seguinte:

Princípio. Prescreva três pontos de contorno z_1, z_2, z_3 do domínio D no plano z. Escolha suas imagens w_1, w_2, w_3 sobre o contorno da imagem D^* de D no plano w. Obtenha o mapeamento de (2). Certifique-se de que D esteja mapeado sobre D^*, e não sobre seu complemento. Neste último caso, troque os dois pontos em w. (Por que fazer isso ajuda?)

EXEMPLO 1 **Mapeamento de um Meio-plano sobre um Disco (Fig. 385)**

Encontre a transformação linear fracionária (1) que mapeia $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ sobre $w_1 = -1$, $w_2 = -i$, $w_3 = 1$, respectivamente.

Solução. De (2), obtemos

$$\frac{w - (-1)}{w - 1} \cdot \frac{-i - 1}{-i - (-1)} = \frac{z - (-1)}{z - 1} \cdot \frac{0 - 1}{0 - (-1)},$$

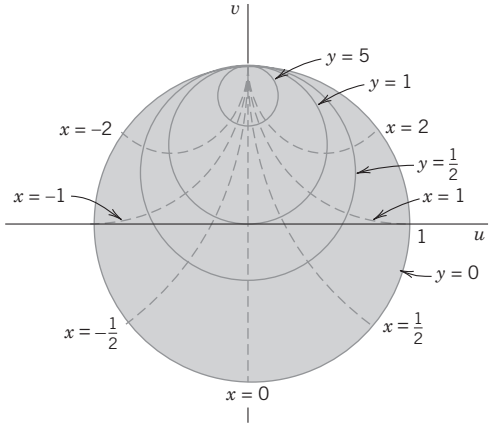


Fig. 385. Transformação linear fracionária do Exemplo 1

portanto,

$$w = \frac{z - i}{-iz + 1}.$$

Mostremos que é possível determinar as propriedades específicas de um mapeamento como este sem recorrermos a muitos cálculos. Para $z = x$, temos $w = (x - i)/(-ix + 1)$, portanto, $|w| = 1$, de modo que o eixo x faz um mapeamento sobre o círculo unitário. Como $z = i$ fornece $w = 0$, o meio-plano superior faz um mapeamento sobre o interior desse círculo, e o meio-plano inferior, sobre o exterior do mesmo círculo. $z = 0, i, \infty$ são mapeados sobre $w = -i, 0, i$, de modo que o eixo imaginário positivo é mapeado sobre o segmento S: $u = 0, -1 \leqq v \leqq 1$. As linhas verticais $x = const.$ são mapeadas sobre os círculos (pelo Teorema 1 da Seção 17.2) por meio de $w = i$ (que é a imagem de $z = \infty$), sendo perpendiculares a $|w| = 1$ (pela conformidade, veja a Fig. 385). Similarmente, as linhas horizontais $y = const.$ são mapeadas sobre círculos por meio de $w = i$ e perpendiculares a S (pela conformidade). A Fig. 385 mostra esses círculos para $y \geqq 0$ e, para $y < 0$, eles se situam no lado externo do disco unitário mostrado. ■

EXEMPLO 2 **Ocorrência de ∞**

Determine a transformação linear fracionária que faz o mapeamento de $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ sobre $w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = 1$, respectivamente.

Solução. De (2), obtemos o mapeamento desejado

$$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

Isto é às vezes chamado de *transformação de Cayley*.[2] Neste caso, (2) forneceu primeiro o quociente $(1 - \infty)/(z - \infty)$, que tivemos que substituir por 1. ■

EXEMPLO 3 **Mapeamento de um Disco sobre um Meio-plano**

Encontre a transformação linear fracionária que mapeia $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1$ sobre $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$, respectivamente, tal que o disco unitário é mapeado sobre o meio-plano direito. (Esboce o disco e o meio-plano.)

Solução. De (2) obtemos, após substituirmos $(i - \infty)/(w - \infty)$ por 1,

$$w = -\frac{z + 1}{z - 1}.$$ ■

Fazer o mapeamento de meios-planos sobre meios-planos é outra tarefa de interesse prático. Por exemplo, podemos desejar mapear o meio-plano superior $y \geqq 0$ sobre o meio-plano superior $v \geqq 0$. Neste caso, deve-se fazer o mapeamento do eixo x sobre o eixo u.

EXEMPLO 4 **Mapeamento de um Meio-plano sobre um Meio-plano**

Encontre a transformação linear fracionária que mapeia $z_1 = -2, z_2 = 0, z_3 = 2$ sobre $w_1 = \infty, w_2 = 1/4, w_3 = 3/8$, respectivamente.

Solução. É possível verificar que (2) fornece a função de mapeamento

$$w = \frac{z + 1}{2z + 4}$$

Qual é a imagem do eixo x? E do eixo y? ■

Os **mapeamentos de discos sobre discos** é uma terceira classe de problemas práticos. Podemos rapidamente verificar que o disco unitário no plano z é mapeado sobre o disco unitário no plano w pela seguinte função, que mapeia z_0 sobre o centro $w = 0$.

(3)
$$w = \frac{z - z_0}{cz - 1}, \qquad c = \bar{z}_0, \qquad |z_0| < 1.$$

Para verificarmos isso, consideramos $|z| = 1$, obtendo, com $c = \bar{z}_0$, como em (3),

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |\bar{z} - c| \\ &= |z|\,|\bar{z} - c| \\ &= |z\bar{z} - cz| = |1 - cz| = |cz - 1|. \end{aligned}$$

Logo,

$$|w| = |z - z_0|/|cz - 1| = 1$$

[2] ARTHUR CAYLEY (1821–1895), matemático inglês e catedrático em Cambridge, conhecido por seus importantes trabalhos em álgebra, teoria das matrizes e equações diferenciais.

de (3), de modo que $|z| = 1$ faz um mapeamento sobre $|w| = 1$, conforme havíamos anunciado, com z_0 indo a 0, como mostra o numerador em (3).

A fórmula (3) é ilustrada pelo exemplo a seguir. Outro caso interessante aparecerá no Problema 10 da Seção 18.2.

EXEMPLO 5 Mapeamento do Disco Unitário sobre o Disco Unitário

Considerando $z_0 = \frac{1}{2}$ em (3), obtemos (verifique!)

$$w = \frac{2z - 1}{z - 2}$$

(Fig. 386). ■

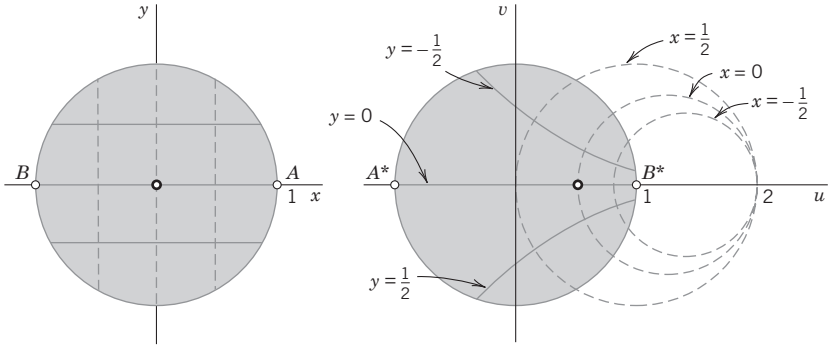


Fig. 386. Mapeamento do Exemplo 5

EXEMPLO 6 Mapeamento de uma Região Angular sobre o Disco Unitário

É possível resolver certos problemas de mapeamento combinando-se as transformações lineares fracionárias com outras. Por exemplo, para mapearmos a região angular D: $-\pi/6 \leqq \arg z \leqq \pi/6$ (Fig. 387) sobre o disco unitário $|w| \leqq 1$, podemos mapear D por $Z = z^3$ sobre o meio-plano direito Z e então este último sobre o disco $|w| \leqq 1$ por

$$w = i\,\frac{Z - 1}{Z + 1}, \qquad \text{combinadas,} \qquad w = i\,\frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}.$$

■

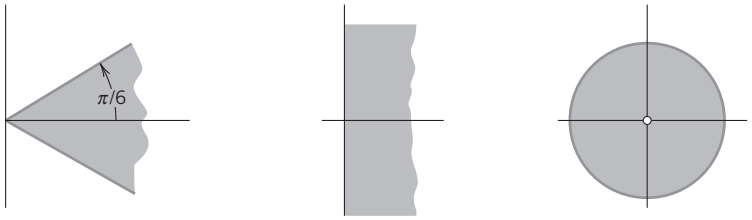


Fig. 387. Mapeamento do Exemplo 6

Este é o final de nossa discussão sobre as transformações lineares fracionárias. Na próxima seção, trataremos dos mapeamentos conformes por meio de outras funções analíticas (seno, cosseno etc.).

PROBLEMAS PROPOSTOS 17.3

1. Obtenha o mapeamento do Exemplo 2 a partir de (2).

2. (Inverso) Encontre o inverso do mapeamento do Exemplo 1. Mostre que, segundo esse inverso, as linhas $x = const.$ são as imagens dos círculos no plano w com centros sobre a linha $v = 1$.

3. Verifique a fórmula (3) para os discos.

4. Obtenha o mapeamento do Exemplo 4 a partir de (2). Encontre seu inverso e prove por cálculos que ele possui os mesmos pontos fixos do próprio mapeamento. Esse fato constitui uma surpresa?

5. (Inversa) Se $w = f(z)$ for uma transformação qualquer que possui uma inversa, prove o fato (trivial!) de que f e sua inversa têm os mesmos pontos fixos.

6. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Transformações Lineares Fracionárias (TLFs). (a) Represente graficamente regiões típicas (quadrados, discos etc.) e suas imagens segundo as TLFs nos Exemplos 1-5.

(b) Faça um estudo experimental da dependência contínua que as TLFs têm de seus coeficientes. Por exemplo, no Exemplo 4, mude

continuamente e faça um gráfico da imagem se alterando numa região fixa (aplicando animação, se ela estiver disponível).

7–15 TLFs DE TRÊS PONTOS E SUAS IMAGENS

Encontre a TLF que mapeia os três pontos dados sobre os três pontos fornecidos na respectiva ordem.

7. $-1, 0, 1$ sobre $-0{,}6 - 0{,}8i, -1, -0{,}6, + 0{,}8i$

8. $0, 1, 2$ sobre $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

9. $2i, -2i, 4$ sobre $-4 + 2i, -4 - 2i, 0$

10. $i, -1, 1$ sobre $-1, -i, i$

11. $0, 1, \infty$ sobre $\infty, 1, 0$

12. $0, -i, i$ sobre $-1, 0, \infty$

13. $2i, i, 0$ sobre $\frac{5}{2}i, 2i, \infty$

14. $0, 2i, -2i$ sobre $-1, 0, \infty$

15. $-1, 0, 1$ sobre $0, 1, -1$

16. Encontre todas as TLFs $w(z)$ que mapeiam o eixo x sobre o eixo u.

17. Encontre uma TLF que mapeia $|z| \leqq 1$ sobre $|w| \leqq 1$ de modo que $z = i/2$ é mapeada sobre $w = 0$. Esboce as imagens das linhas $x = const.$ e $y = const.$

18. Encontre uma função analítica que mapeie o segundo quadrante do plano z sobre o interior do disco unitário no plano w.

19. Encontre uma função analítica $w = f(z)$ que mapeie a região $0 \leqq \arg z \leqq \pi/4$ sobre o disco unitário $|w| \leqq 1$.

20. **(Composição)** Mostre que a composição de duas TLFs é também uma TLF.

17.4 Mapeamento Conforme por Outras Funções

Até agora, viemos discutindo o mapeamento por z^n, e^z (Seção 17.1) e as transformações lineares fracionárias (Seções 17.2, 17.3), de modo que agora passaremos para o mapeamento por funções analíticas trigonométricas e hiperbólicas.

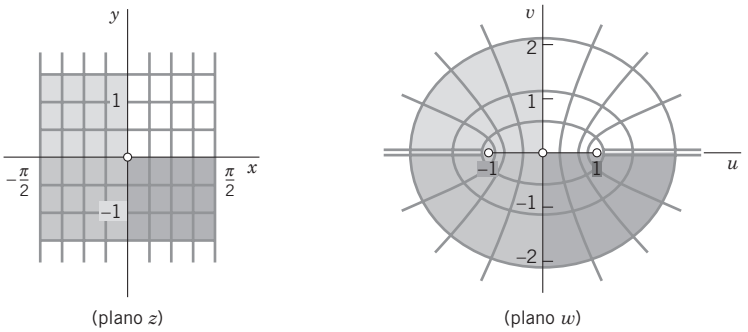


Fig. 388. Mapeamento de $w = u + iv = \text{sen } z$

Função Seno. A Fig. 388 mostra o mapeamento por

$$w = u + iv = \text{sen } z = \text{sen } x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \qquad \text{(Seção 13.6).} \tag{1}$$

Logo,

$$u = \text{sen } x \cosh y, \qquad v = \cos x \operatorname{senh} y. \tag{2}$$

Como sen z é periódico e tem o período 2π, se considerarmos todo o plano z, o mapeamento certamente não é injetor. Restringimos z à faixa vertical S: $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, mostrada na Fig. 388. Como $f'(z) = \cos z = 0$ em $z = \pm\frac{1}{2}\pi$, o mapeamento não é conforme nesses dois pontos críticos. Podemos dizer que a rede retangular de linhas retas $x = const.$ e $y = const.$ na Fig. 388 é mapeada sobre uma rede no plano w consistindo em hipérboles (as imagens das linhas verticais $x = const.$) e elipses (as imagens das linhas horizontais $y = const.$), que fazem interseções em ângulos retos (conformidade!) com as hipérboles. Os cálculos correspondentes são simples. De (2) e das relações $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ and $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, obtemos

$$\frac{u^2}{\text{sen}^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \qquad \text{(Hipérboles)}$$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 y} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{(Elipses).}$$

As exceções são as linhas verticais $x = \pm\frac{1}{2}\pi$, que estão "dobradas" sobre $u \leqq -1$ e $u \geqq 1$ ($v = 0$), respectivamente.

A Fig. 389 ilustra isso ainda mais. Os lados superior e inferior do retângulo são mapeados sobre semi-elipses e os lados verticais sobre $-\cosh 1 \leqq u \leqq -1$ e $1 \leqq u \leqq \cosh 1$ ($v = 0$), respectivamente. No Problema 5 da Seção 18.2, veremos uma aplicação disso a um problema de potencial.

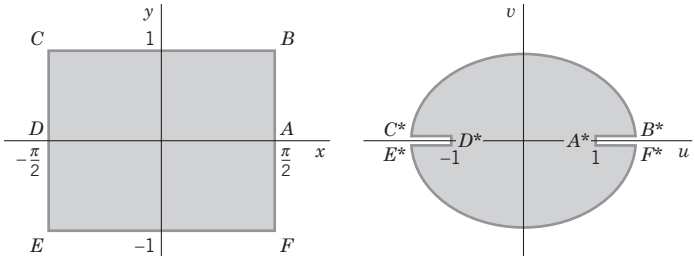


Fig. 389. Mapeamento por $w = \text{sen } z$

Função Cosseno. O mapeamento $w = \cos z$ poderia ser discutido independentemente, porém, uma vez que

$$w = \cos z = \text{sen } (z + \tfrac{1}{2}\pi), \tag{3}$$

vemos imediatamente que se trata do mesmo mapeamento de sen z precedido de uma translação para a direita, ao longo de $\frac{1}{2}\pi$ unidade.

Seno hiperbólico. Uma vez que

$$w = \text{senh } z = -i \text{ sen } (iz), \tag{4}$$

o mapeamento é uma rotação anti-horária $Z = iz$ ao longo de $\frac{1}{2}\pi$ (isto é, 90°), seguida do mapeamento do seno $Z^* = \text{sen } Z$, seguida de uma rotação horária de 90° $w = -iZ^*$.

Cosseno hiperbólico. Esta função

$$w = \cosh z = \cos (iz) \tag{5}$$

define um mapeamento correspondente a uma rotação $Z = iZ$ seguida do mapeamento $w = \cos Z$.

A Fig. 390 mostra o mapeamento de uma faixa semi-infinita sobre um meio-plano por $w = \cosh z$. Como $\cosh 0 = 1$, o ponto $z = 0$ é mapeado sobre $w = 1$. Para valores reais $z = x \geqq 0$, $\cosh z$ é real e diminui à medida que x aumenta monotonicamente a partir de 1. Logo, o eixo x positivo é mapeado sobre a porção $u \geqq 1$ do eixo u.

Para um imaginário puro $z = iy$, temos $\cosh iy = \cos y$. Logo, o contorno esquerdo da faixa é mapeado sobre o segmento $1 \geqq u \geqq -1$ do eixo u, com o ponto πi correspondendo a

$$w = \cosh i\pi = \cos \pi = -1.$$

No contorno superior da faixa, $y = \pi$, e como $\text{sen } \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$, segue-se que essa parte do contorno é mapeada sobre a porção $u \leqq -1$ do eixo u. Logo, o contorno da faixa é mapeado sobre o eixo u. Não é difícil ver que o interior da faixa é mapeado sobre a metade superior do plano w e que o mapeamento é injetor.

Esse mapeamento mostrado na Fig. 390 possui aplicações na teoria do potencial, conforme veremos no Problema 12 da Seção 18.3.

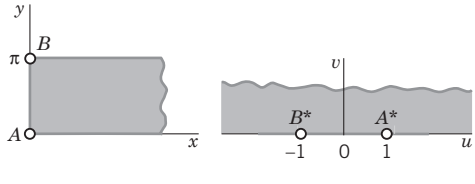


Fig. 390. Mapeamento por $w = \cosh z$

Função Tangente. A Fig. 391 mostra o mapeamento de uma faixa vertical infinita sobre o círculo unitário por $w = \tan z$, realizado em três etapas, conforme sugerido pela representação (Seção 13.6)

$$w = \tan z = \frac{\text{sen } z}{\cos z} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})/i}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{(e^{2iz} - 1)/i}{e^{2iz} + 1}.$$

Logo, se fizermos $Z = e^{2iz}$ e usarmos $1/i = -i$, teremos

$$w = \tan z = -iW, \qquad W = \frac{Z-1}{Z+1}, \qquad Z = e^{2iz}. \tag{6}$$

Vemos agora que $w = \tan z$ é uma transformação linear fracionária precedida de um mapeamento exponencial (veja a Seção 17.1) e seguida de uma rotação horária de um ângulo de $\frac{1}{2}\pi$ (90°).

A faixa é *S:* $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$, e mostremos que ela é mapeada sobre o disco unitário no plano w. Como $Z = e^{2iz} = e^{-2y+2ix}$, vemos de (10) da Seção 13.5 que $|Z| = e^{-2y}$, Arg $Z = 2x$. Logo, as linhas verticais $x = -\pi/4$, 0, $\pi/4$ são mapeadas sobre os raios Arg $Z = -\pi/2$, 0, $\pi/2$, respectivamente. Logo, S é mapeada sobre o meio-plano direito Z. Além disso, $|Z| = e^{-2y} < 1$ se $y > 0$ e $|Z| > 1$ se $y < 0$. Logo, a metade superior de S é mapeada dentro do círculo unitário $|Z| = 1$ e a metade inferior de S fora de $|Z| = 1$, conforme mostra a Fig. 391.

Agora, vem a transformação linear fracionária em (6), que denotaremos por $g(Z)$:

$$W = g(Z) = \frac{Z-1}{Z+1}. \tag{7}$$

Para valores reais de Z, essa expressão é real. Logo, o eixo real Z é mapeado sobre o eixo real W. Além disso, o eixo imaginário Z é mapeado sobre o círculo unitário $|W| = 1$ porque, para o imaginário puro $Z = iY$, obtemos de (7)

$$|W| = |g(iY)| = \left|\frac{iY-1}{iY+1}\right| = 1.$$

O meio-plano direito Z é mapeado dentro deste círculo unitário $|W| = 1$, e não fora, pois $Z = 1$ possui sua imagem $g(1) = 0$ dentro desse círculo. Finalmente, o círculo unitário $|Z| = 1$ é mapeado sobre o eixo imaginário W, pois esse círculo é $Z = e^{i\phi}$, de modo que (7) fornece uma expressão imaginária pura, a saber,

$$g(e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi}-1}{e^{i\phi}+1} = \frac{e^{i\phi/2}-e^{-i\phi/2}}{e^{i\phi/2}+e^{-i\phi/2}} = \frac{i \operatorname{sen}(\phi/2)}{\cos(\phi/2)}.$$

Do plano W, obtemos o plano w simplesmente fazendo uma rotação horária de $\pi/2$; veja (6).

Juntos, mostramos que $w = \tan z$ mapeia *S:* $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ sobre o disco unitário $|w| = 1$, com os quatro quartos de S sendo mapeados conforme indica a Fig. 391. Esse mapeamento é conforme e injetor.

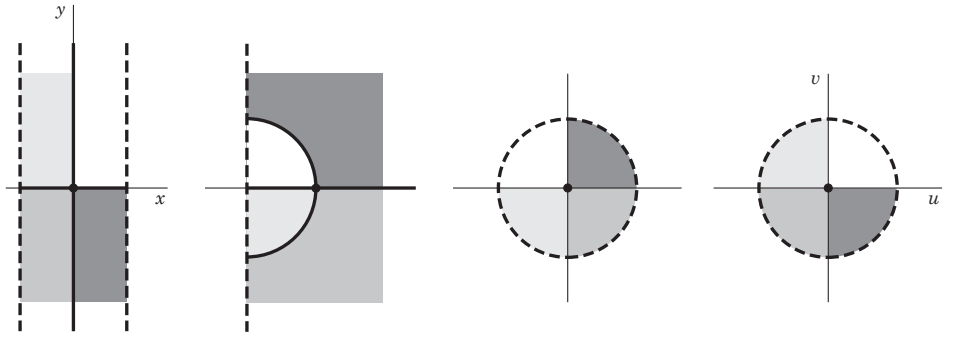


Fig. 391. Mapeamento por $w = \tan z$

PROBLEMAS PROPOSTOS 17.4

1–7 MAPEAMENTO CONFORME $w = e^z$

Encontre e esboce a imagem da região dada sob $w = e^z$

1. $0 \leqq x \leqq 2$, $-\pi \leqq y \leqq \pi$

2. $-1 \leqq x \leqq 0$, $0 \leqq y \leqq \pi/2$

3. $-0{,}5 < x < 0{,}5$, $3\pi/4 < y < 5\pi/4$

4. $-3 < x < 3$, $\pi/4 < y < 3\pi/4$

5. $0 < x < 1$, $0 < y < \pi$

6. $x < 0$, $-\pi/2 < y < \pi/2$

7. x arbitrário, $0 \leqq y \leqq 2\pi$

8. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Mapeamento Conforme. Se seu programa de álgebra computacional for capaz de fazer mapeamento conforme, utilize-o para resolver o Problema 5. Então, aumente o valor de y para além de π, digamos, para 50π ou 100π. Enuncie o que você esperava. Veja o que você obtém como imagem. Explique.

9–12 MAPEAMENTO CONFORME $w = \operatorname{sen} z$

Encontre e faça um esboço ou gráfico da imagem da região dada sob $w = \operatorname{sen} z$

9. $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq 1$

10, $0 < x < \pi/6$, y arbitrário

11. $0 < x < 2\pi$, $1 < y < 5$

12. $-\pi/4 < x < \pi/4$, $0 < y < 3$

13. Determine todos os pontos nos quais $w = \operatorname{sen} z$ não é conforme.

14. Encontre e faça um esboço ou gráfico das imagens das linhas $x = 0, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2$ sob o mapeamento $w = \operatorname{sen} z$.

15. Encontre uma função analítica que mapeie sobre o meio-plano superior a região R circundada pelos eixos x e y positivos e pela hipérbole $xy = \pi/2$ no primeiro quadrante. *Sugestão.* mapeie primeiro a região sobre a faixa horizontal.

16. Descreva o mapeamento $w = \cosh z$ em termos do mapeamento $w = \operatorname{sen} z$ e fazendo rotações e translações.

17. Encontre todos os pontos nos quais o mapeamento $w = \cosh z$ não é conforme.

18–22 MAPEAMENTO CONFORME $w = \cos z$

Encontre e faça um esboço ou gráfico da região dada sob $w = \cosh z$

18. $0 < x < \pi/2$, $0 < y < 2$

19. $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$

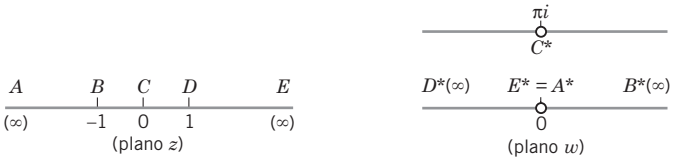
20, $-1 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$

21. $\pi < x < 2\pi$, $y < 0$

22. $0 < x < 2\pi$, $1/2 < y < 1$

23. Encontre as imagens das linhas $y = c = const.$ sob o mapeamento $w = \cosh z$.

24. Mostre que $w = \operatorname{Ln} \dfrac{z-1}{z+1}$ mapeia o meio-plano superior sobre a faixa horizontal $0 \leqq \operatorname{Im} w \leqq \pi$, como mostra a figura.



Problema 24

25. Encontre e esboce a imagem de R: $2 \leqq |z| \leqq 3$, $\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/2$ sob o mapeamento $w = \operatorname{Ln} z$.

17.5 Superfícies Riemannianas. *Opcional*

As superfícies riemannianas são superfícies nas quais as relações multivalentes, como $w = \sqrt{z}$ ou $w = \ln z$, tornam-se univalentes, ou seja, tornam-se funções no sentido usual. Expliquemos essa idéia, que é simples e ao mesmo tempo que engenhosa, sendo uma das mais importantes da análise complexa.

O mapeamento dado por

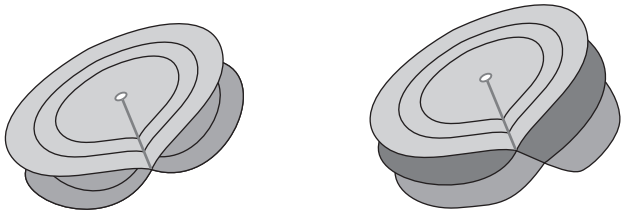
$$w = u + iv = z^2 \tag{1}$$ (Seção 17.1)

é conforme, excetuando-se em $z = 0$, onde $w' = 2z = 0$. Em $z = 0$, os ângulos são duplicados sob o mapeamento. Portanto, o meio-plano direito de z (incluindo o eixo y positivo) é mapeado sobre todo o plano w, cortado ao longo da metade negativa do eixo u; esse mapeamento é injetor. Algo similar ocorre com o meio-plano esquerdo de z (incluindo o eixo y negativo). Logo, a imagem do plano inteiro de z sob $w = z^2$ "cobre o plano w duas vezes" no sentido em que cada $w \neq 0$ é a imagem de dois pontos z; se z_1 for uma, a outra é $-z_1$. Por exemplo, $z = i$ e $-i$ são ambos mapeados sobre $w = -1$.

Agora, vem a idéia crucial. Colocamos uma sobre a outra essas duas cópias do plano cortado de w, de modo que a folha superior é a imagem do meio-plano direito R de z, e a folha inferior é a imagem do meio-plano esquerdo L de z. Juntamos as duas folhas transversalmente, ao longo dos cortes (ao longo do eixo negativo de u), de modo que z se move de R para L, e sua imagem pode se mover da folha superior para a inferior. As duas origens são mantidas juntas porque $w = 0$ é a imagem de apenas um ponto z, $z = 0$. A superfície assim obtida é chamada de **superfície riemanniana** (Fig. 392a). $w = 0$ é chamado de "ponto de redemoinho" ou **ponto de ramificação**. $w = z^2$ mapeia todo o plano z sobre essa superfície e de modo injetor.

Trocando os papéis das variáveis z e w, segue-se que a relação bivalente

$$w = \sqrt{z} \tag{2}$$ (Seção 13.2)



(a) Superfície riemanniana de $\sqrt{z}$ (b) Superfície riemanniana de $\sqrt[3]{z}$

Fig. 392. Superfícies riemannianas

torna-se univalente sobre a superfície riemanniana da Fig. 392a, ou seja, uma função no sentido usual. Podemos fazer a folha superior corresponder ao valor principal de $\sqrt{z}$. Sua imagem é o meio-plano direito de w. A outra folha é então mapeada sobre o meio-plano esquerdo de w.

Similarmente, a relação trivalente $w = \sqrt[3]{z}$ torna-se univalente sobre a superfície riemanniana da Fig. 392b, que é também um ponto de ramificação em $z = 0$.

O logaritmo natural infinitamente multivalente (Seção 13.7)

$$w = \ln z = \operatorname{Ln} z + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

torna-se univalente sobre uma superfície riemanniana consistindo em um número infinitamente grande de folhas. $w = \operatorname{Ln} z$ corresponde a uma delas. Essa folha é cortada ao longo do eixo x negativo, e a borda superior do corte é juntada à borda inferior da próxima folha, correspondente ao argumento $\pi < \theta \leqq 3\pi$, ou seja, é juntada a

$$w = \operatorname{Ln} z + 2\pi i.$$

O valor principal Ln z mapeia sua folha sobre a faixa horizontal $-\pi < v \leqq \pi$. A função $w = \operatorname{Ln} z + 2\pi i$ mapeia sua folha sobre a faixa vizinha $\pi < v \leqq 3\pi$, e assim por diante. O mapeamento dos pontos $z \neq 0$ da superfície riemanniana sobre os pontos do plano w é injetor. Veja também o Exemplo 5 da Seção 17.1.

PROBLEMAS PROPOSTOS 17.5

1. Considere $w = \sqrt{z}$. Encontre o caminho do ponto imagem w de um ponto z que se move duas vezes em torno do círculo unitário, começando da posição inicial $z = 1$.

2. Mostre que a superfície riemanniana de $w = \sqrt[n]{z}$ consiste em n folhas e possui um ponto de ramificação em $z = 0$.

3. Faça um esboço, similar ao da Fig. 392, da superfície riemanniana de $\sqrt[4]{z}$.

4. Mostre que a superfície riemanniana de $w = \sqrt{(z-1)(z-2)}$ possui pontos de ramificação em $z = 1$ e $z = 2$ e consiste em duas folhas que podem ser cortadas ao longo do segmento de reta de 1 a 2 e juntadas transversalmente. *Sugestão*. introduza as coordenadas polares $z - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z - 2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

5–10 SUPERFÍCIES RIEMANNIANAS

Encontre os pontos de ramificação e o número de folhas da superfície riemanniana.

5. $\sqrt{3z + 5}$

6. $\sqrt{(1 - z^2)(4 - z^2)}$

7. $5 + \sqrt[3]{2z + i}$

8. $\ln (3z - 4i)$

9. $e^{\sqrt{z}}$

10. $\sqrt{e^z}$

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 17

1. De que modo definimos o ângulo de interseção de duas curvas orientadas e o que significa dizer que um mapeamento é conforme?

2. Em quais pontos um mapeamento $w = f(z)$ por uma função analítica não é conforme? Dê exemplos.

3. O que acontece aos ângulos em z_0 sob um mapeamento $w = f(z)$ se $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) = 0$, $f'''(z_0) \neq 0$?

4. Qual o significado dos termos "sobrejetor", "injetor" e "bijetor"?

5. Qual mapeamento resultou no aerofólio de Joukowski?

6. O que são transformações lineares fracionárias (TLFs)? Qual a razão de sua importância em conexão com o plano complexo estendido?

7. Por que, para uma TLF, exigimos que $ad - bc \neq 0$?

8. O que são os pontos fixos de um mapeamento? Dê exemplos.

9. Você é capaz de se lembrar das propriedades de mapeamento de $w = \operatorname{sen} z$? $\cos z$? e^z?

10. O que é uma superfície riemanniana? Por que ela foi introduzida? Explique o exemplo mais simples.

11–16 MAPEAMENTO DE $w = z^2$

Encontre e esboce a imagem da curva ou região dada sob $w = z^2$.

11. $y = -1$, $y = 1$

12. $xy = -4$

13. $|z| = 4{,}5$, $|\arg z| < \pi/4$

14. $0 < y < 2$

15. $\frac{1}{2} < x < 1$

16. $\operatorname{Im} z > 0$

17–22 MAPEAMENTO DE $w = 1/z$

Encontre e esboce a imagem da curva ou região dada sob $w = 1/z$.

17. $x = -1$

18. $y = 1$

19. $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

20. $|z| < \frac{1}{2}$, $y < 0$

21. $|\arg z| < \pi/4$

22. $|z| < 1$, $x < 0$, $y > 0$

23–28 FALHA DE CONFORMIDADE

Onde o mapeamento feito pela função dada não é conforme? (Justifique.)

23. $5z^7 + 7z^5$

24. $\cosh 2z$

25. $\operatorname{sen} 2z + \cos 2z$

26. $\cos \pi z^2$

27. $\exp (z^4 + z^2)$

28. $z + 1/z$ $(z \neq 0)$

29–34 TRANSFORMAÇÕES LINEARES FRACIONÁRIAS (TLFs)

Encontre a TLF que mapeia

29. 0, 1, 2 sobre 0, i, $2i$, respectivamente

30. –1, 1, 2 sobre 0, 2, 3/2, respectivamente

31. 1, –1, $-i$ sobre 1, –1, i, respectivamente

32. –1, $-i$, i sobre $1 - i$, 2, 0 respectivamente

33. 0, ∞, –2 sobre 0, 1, ∞, respectivamente

34. 0, i, $2i$ sobre 0, ∞, $2i$

35–40 **Pontos Fixos.** Encontre todos os pontos fixos de

35. $w = \dfrac{z + 2}{z + 1}$

36. $w = \dfrac{2iz - 1}{z + 2i}$

37. $w = \dfrac{3z + 2}{z - 1}$

38. $w = \dfrac{iz + 5}{5z + i}$

39. $w = \dfrac{(2 + i)\,z + 1}{z - i}$

40. $w = z^4 + z - 81$

41–45 **REGIÕES DADAS**

Encontre uma função analítica $w = f(z)$ que mapeia:

41. A faixa infinita $0 < y < \pi/3$ sobre o meio-plano superior $v > 0$.

42. O interior do círculo unitário $|z| = 1$ sobre o exterior do círculo $|w + 1| = 5$.

43. A região $x > 0$, $y > 0$, $xy < k$ sobre a faixa $0 < v < 1$.

44. O semidisco $|z| < 1$, $x > 0$ sobre o exterior do círculo unitário $|w| = 1$.

45. O setor $0 < \arg z < \pi/3$ sobre a região $u < 1$.

RESUMO DO CAPÍTULO 17
Mapeamento Conforme

Uma função complexa $w = f(z)$ fornece um **mapeamento** de seu domínio de definição no plano complexo z sobre sua faixa de valores no plano complexo w. Se $f(z)$ for *analítica*, esse mapeamento é **conforme**, ou seja, ele preserva os ângulos: as imagens de duas curvas quaisquer que fazem interseção entre si continuam fazendo o mesmo ângulo de interseção, tanto em magnitude quanto em sentido, do mesmo modo que as próprias curvas (Seção 17.1). Exceções a isso são os pontos nos quais $f'(z) = 0$ (**"pontos críticos"**, p. ex., $z = 0$ para $w = z^2$).

Para as propriedades de mapeamento de e^z, cos z, sen z etc., veja as Seções 17.1 e 17.4.

As **transformações lineares fracionárias**, também chamadas de *transformações de Möbius,*

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

(Seções 17.2, 17.3)

($ad - bc \neq 0$) mapeiam o plano complexo estendido (Seção 17.2) sobre si mesmo. Elas resolvem os problemas de mapeamento de meios-planos sobre meios-planos ou sobre discos, e de discos sobre discos ou sobre meios-planos. Prescrevendo-se as imagens de três pontos, chega-se a uma determinação única de (1).

As **superfícies riemannianas** (Seção 17.5) consistem em diversas folhas conectadas em certos pontos chamados de *pontos de ramificação*. Sobre eles, as relações multivalentes tornam-se univalentes, ou seja, funções no sentido usual. *Exemplos*. Para $w = \sqrt{z}$, necessitamos de duas folhas (com o ponto de ramificação 0), visto que essa relação é bivalente. Para $w = \ln z$, precisamos de um número infinitamente grande de folhas, visto que essa relação é infinitamente multivalente (veja a Seção 13.7).

CAPÍTULO 18

Análise Complexa e Teoria do Potencial

A equação de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ é uma das mais importantes EDPs (Equações Diferenciais Parciais) da engenharia matemática, já que ela ocorre em gravitação (Seções 9.7, 12.10), eletrostática (Seção 9.7), condução de calor em estado estacionário (Seção 12.5), escoamento de fluidos incompressíveis etc. A teoria que trata da solução destas equações é conhecida como **teoria do potencial** (embora "potencial" seja um termo também usado num sentido mais geral em associação com gradientes; veja a Seção 9.7).

No "caso de duas dimensões" quando Φ depende somente das duas coordenadas cartesianas x e y, a equação de Laplace torna-se:

$$\nabla^2\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

Da Seção 13.4, sabemos então que suas soluções Φ estão intimamente relacionadas com as funções analíticas complexas $\Phi + i\Psi$. Essa relação é a razão principal da importância da análise complexa em física e engenharia. (Usamos a notação $\Phi + i\Psi$, pois $u + iv$ será necessária no mapeamento conforme.)

Neste capítulo, devemos considerar essa conexão e suas conseqüências detalhadamente, e ilustrá-las com exemplos de modelos típicos da eletrostática (Seções 18.1, 18.2), condução de calor (Seção 18.3) e hidrodinâmica (Seção 18.4). Isso nos levará aos problemas de **valores de contorno**, alguns dos quais envolvem funções cujas propriedades de mapeamento estudamos no Capítulo 17. Além disso, na Seção 18.2 utilizaremos o mapeamento conforme como um método para explicar a teoria do potencial.

Na Seção 18.5, deduziremos uma importante fórmula de Poisson para potenciais num disco circular.

Finalmente, na Seção 18.6, mostraremos que os resultados de funções analíticas podem ser utilizados para caracterizar propriedades *gerais* das **funções harmônicas** (soluções de equações de Laplace cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas).

Pré-requisitos: Capítulos 13, 14, 17.
Referências e Respostas dos Problemas: Parte D do Apêndice 1 e Apêndice 2.

18.1 Campos Eletrostáticos

A força elétrica de atração ou repulsão entre partículas carregadas é governada pela lei de Coulomb. Essa força é o gradiente da função Φ, chamada de **potencial eletrostático**. Em pontos quaisquer onde se configura ausência de cargas, Φ é a solução da equação de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0$$

As superfícies $\Phi = const.$ são chamadas de **superfícies eqüipotenciais**. Em cada ponto P no qual o gradiente de Φ é diferente do vetor nulo, esse gradiente é perpendicular à superfície $\Phi = const.$ no ponto P; ou seja, a força elétrica tem direção perpendicular à superfície eqüipotencial. (Veja também as Seções 9.7 e 12.10.)

Os problemas que discutiremos em todo este capítulo são **bidimensionais** (pela razão já citada no início do capítulo), isto é, eles modelam sistemas físicos que se encontram no espaço tridimensional (obviamente!), mas de tal forma que o potencial Φ independa de uma das coordenadas espaciais, dependendo somente de duas coordenadas, que chamaremos de x e y. Então a **equação de Laplace** torna-se

(1)
$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

As superfícies eqüipotenciais agora aparecem como **linhas eqüipotenciais** (curvas) no plano xy.

Ilustremos essas idéias com alguns simples exemplos básicos.

EXEMPLO 1 Potencial entre Placas Paralelas

Encontre o potencial Φ do campo entre duas placas condutoras paralelas que se estendem ao infinito (Fig. 393) e que são mantidas nos potenciais Φ_1 e Φ_2, respectivamente.

Solução. Da superfície das placas segue que Φ depende somente de x e a equação de Laplace torna-se $\Phi'' = 0$. Integrando duas vezes, obtemos $\Phi = ax + b$, onde as constantes a e b são determinadas pelos valores de contorno de Φ nas placas. Por exemplo, se as placas correspondem a $x = -1$ e $x = 1$, a solução é

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1)x + \tfrac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_1).$$

As superfícies eqüipotenciais são planos paralelos. ■

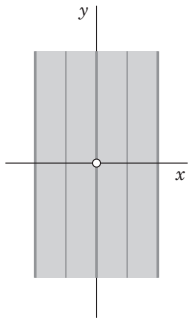


Fig. 393. Potencial do Exemplo 1

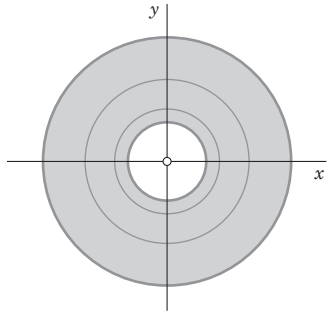


Fig. 394. Potencial do Exemplo 2

EXEMPLO 2 Potencial entre Cilindros Coaxiais

Encontre o potencial Φ do campo entre dois condutores cilíndricos coaxiais que se estendem ao infinito em ambas as extremidades (Fig. 394), mantidas nos potenciais Φ_1 e Φ_2, respectivamente.

Solução. Aqui, Φ depende somente de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, por razões de simetria, e a equação de Laplace $r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0$ [(5) da Seção 12.9] com $u_{\theta\theta} = 0$ e $u = \Phi$ torna-se $r\Phi'' + \Phi' = 0$. Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} = -\frac{1}{r}, \qquad \ln \Phi' = -\ln r + \tilde{a}, \qquad \Phi' = \frac{a}{r}, \qquad \Phi = a \ln r + b$$

e a e b são determinados a partir dos valores dados de Φ nos cilindros. Apesar de não existirem condutores que se estendem ao infinito, o campo em nosso condutor idealizado vai se aproximar do campo gerado por um longo condutor finito nessa parte afastada das duas extremidades dos cilindros. ■

EXEMPLO 3 Potencial em uma Região Angular

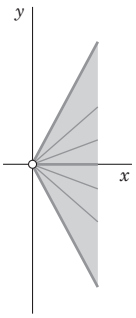


Fig. 395. Potencial do Exemplo 3

Encontre o potencial Φ entre as placas condutoras mostradas na Fig. 395, que são mantidas nos potenciais Φ_1 (placa inferior) e Φ_2, e fazem entre si um ângulo α, onde $0 < \alpha \leqq \pi$ (na figura temos $\alpha = 120^\circ = 2\pi/3$).

Solução. $\theta = \text{Arg } z$ ($z = x + iy \neq 0$) é constante sobre os raios $\theta = const$. Trata-se de uma expressão harmônica, pois corresponde à parte imaginária da função analítica Ln z (Seção 13.7). Logo, a solução é

$$\Phi(x, y) = a + b\, Arg\, z$$

com a e b determinados pelas duas condições de contorno (correspondentes aos valores dados nas placas)

$$a + b(-\tfrac{1}{2}\alpha) = \Phi_1, \qquad a + b(\tfrac{1}{2}\alpha) = \Phi_2.$$

Deste modo, $a = (\Phi_2 + \Phi_1)/2$, $b = (\Phi_2 - \Phi_1)/\alpha$. A resposta é

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_1) + \frac{1}{\alpha}(\Phi_2 - \Phi_1)\theta, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}. \quad ■$$

Potencial Complexo

Consideremos que $\Phi(x, y)$ seja harmônica num certo domínio D e que $\Psi(x, y)$ seja o conjugado harmônico de Φ em D. (Veja a Seção 13.4, onde escrevemos u e v, que serão necessários no mapeamento conforme a partir da próxima seção; daí a mudança para Φ e Ψ.) Então

(2)
$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

é uma função analítica de $z = x + iy$. Essa função F é chamada de **potencial complexo** correspondente ao potencial real Φ. Lembre da Seção 13.4 que, para um dado Φ, o conjugado Ψ é determinado de modo único, exceto

pela adição de uma constante real. Logo, podemos dizer ***o*** potencial complexo, sem causar quaisquer desentendimentos.

O uso de F tem duas vantagens, uma técnica e uma física. Tecnicamente, F é mais fácil de manipular do que as partes reais ou imaginárias, em associação com os métodos de análise complexa. Fisicamente, Ψ tem um significado. Pela conformidade, as curvas $\Psi = const.$ interceptam em ângulos retos as linhas eqüipotenciais $\Phi = const.$ no plano xy [exceto quando $F'(z) = 0$]. Conseqüentemente elas têm a direção da força elétrica, sendo, por isso, chamadas de **linhas de força**. Elas correspondem aos caminhos percorridos por partículas carregadas (elétrons em um microscópio eletrônico etc.).

EXEMPLO 4 **Potencial Complexo**

No Exemplo 1, o conjugado vale $\Psi = ay$. Disso se segue que um potencial complexo corresponde a

$$F(z) = az + b = ax + b + iay,$$

e as linhas de força são retas horizontais $y = const.$ paralelas ao eixo x. ■

EXEMPLO 5 **Potencial Complexo**

No Exemplo 2, temos $\Phi = a \ln r + b = a \ln|z| + b$. O conjugado vale $\Psi = a \operatorname{Arg} z$. Logo, o potencial complexo é

$$F(z) = a \operatorname{Ln} z + b$$

e as linhas de força correspondem a retas passando pela origem. $F(z)$ pode também ser interpretada como o potencial complexo de uma fonte linear (como um fio perpendicular ao plano xy), cujo traço sobre o plano xy corresponde à origem. ■

EXEMPLO 6 **Potencial Complexo**

No Exemplo 3, obtemos $F(z)$ notando que $i \operatorname{Ln} z = i \ln |z| - \operatorname{Arg} z$, multiplicando essa expressão por $-b$ e adicionando a:

$$F(z) = a - ib \operatorname{Ln} z = a + b \operatorname{Arg} z - ib \ln|z|.$$

Disso, vemos que as linhas de força são os círculos concêntricos $|z| = const.$ Você é capaz de esboçá-las? ■

Superposição

Potenciais mais complicados podem freqüentemente ser obtidos por superposição.

EXEMPLO 7 **Potencial de um Par de Fontes Lineares (Par de Fios Carregados)**

Determine o potencial de um par de fontes lineares com cargas de sentidos opostos, porém de módulos iguais, situadas nos pontos $z = c$ e $z = -c$ sobre o eixo real.

Solução. Dos Exemplos 2 e 5, segue-se que o potencial de cada uma das fontes lineares vale

$$\Phi_1 = K \ln |z - c| \qquad \text{e} \qquad \Phi_2 = -K \ln |z + c|,$$

respectivamente. Aqui, a constante real K quantifica o módulo (quantidade) da carga. Essas são as partes reais do potencial complexo

$$F_1(z) = K \operatorname{Ln} (z - c) \qquad \text{e} \qquad F_2(z) = -K \operatorname{Ln} (z + c)$$

Logo, o potencial complexo da combinação das duas fontes lineares vale

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = K [\operatorname{Ln} (z - c) - \operatorname{Ln} (z + c)]. \tag{3}$$

As **linhas eqüipotenciais** são as curvas

$$\Phi = \operatorname{Re} F(z) = K \ln \left| \frac{z - c}{z + c} \right| = const, \qquad \text{logo,} \qquad \left| \frac{z - c}{z + c} \right| = const.$$

Essas equações correspondem a círculos, o que pode ser mostrado por cálculos diretos. As **linhas de força** são

$$\Psi = \operatorname{Im} F(z) = K [\operatorname{Arg} (z - c) - \operatorname{Arg} (z + c)] = const.$$

Escrevendo isso de forma sucinta (Fig. 396)

$$\Psi = K(\theta_1 - \theta_2) = const.$$

Agora, $\theta_1 - \theta_2$ é o ângulo entre os segmentos de reta de z a c e $-c$ (Fig. 396). Logo, as linhas de força são as curvas ao longo das quais o segmento de reta S: $-c \leqq x \leqq c$ aparece sob um ângulo constante. Essas curvas correspondem à totalidade dos arcos circulares sobre S, como é (ou deveria ser) conhecido na geometria elementar. Logo, as linhas de força são circunferências. A Fig. 397 mostra algumas delas juntamente com algumas linhas eqüipotenciais.

Esse potencial pode não apenas ser interpretado como o gerado por duas fontes lineares, mas também como o existente entre dois cilindros circulares cujos eixos são paralelos porém não-coincidentes, ou também como o potencial entre dois cilindros iguais e externos um ao outro, ou ainda como o potencial entre um cilindro e uma parede plana. Explique isso usando a Fig. 397. ■

Essa idéia do potencial complexo que acabamos de explicar é a chave para a existência de uma relação muito próxima da teoria do potencial com a análise complexa, e que também se verifica nos casos de fluxo de calor e de escoamento de fluidos.

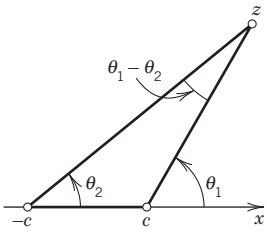


Fig. 396. Argumentos do Exemplo 7

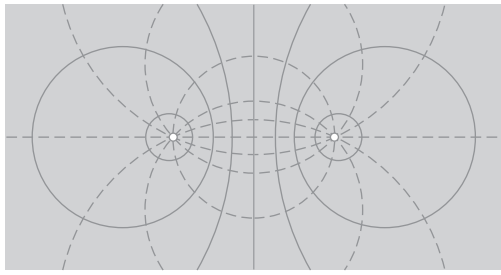


Fig. 397. Linhas eqüipotenciais e linhas de força do Exemplo 7

PROBLEMAS PROPOSTOS 18.1

1–4 POTENCIAL

Encontre e esboce o potencial. Obtenha o potencial complexo:

1. Entre duas placas paralelas em $x = -3$ e 3, com potenciais de 140 V e 260 V, respectivamente

2. Entre duas placas paralelas em $x = -4$ e 10, com potenciais de 4,4 kV e 10 kV, respectivamente

3. Entre os eixos (potencial de 110 V) e a hipérbole $xy = 1$ (potencial de 60 V)

4. Entre placas paralelas em $y = x$ e $x + k$, com potenciais de 0 e 100 V, respectivamente

5–8 CILINDROS COAXIAIS

Obtenha o potencial entre dois cilindros coaxiais infinitos de raios r_1 e r_2 com potenciais U_1 e U_2, respectivamente. Encontre o potencial complexo.

5. $r_1 = 0{,}5$, $r_2 = 2{,}0$ $U_1 = -110$ V, $U_2 = 110$ V

6. $r_1 = 1$, $r_2 = 10$, $U_1 = 100$ V, $U_2 = 1$ kV

7. $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, $U_1 = 200$ V, $U_2 = 0$

8. $r_1 = 0{,}1$, $r_2 = 10$, $U_1 = 150$ V, $U_2 = 50$ V

9. Mostre que $\Phi = \theta/\pi = (1/\pi)$ arctg (y/x) é harmônica no semiplano superior e satisfaz a condição de contorno $\Phi(x, 0) = 1$ se $x < 0$ e 0 se $x > 0$, e o potencial complexo correspondente vale $F(z) = -(i/\pi)$ Ln z.

10. Faça o mapeamento do semiplano superior z sobre o disco unitário $|w| \leqq 1$ de modo que 0, ∞, -1 sejam mapeados sobre 1, i, $-i$, respectivamente. Quais são as condições de contorno em $|w| = 1$ resultantes do potencial do Problema 9? Qual o potencial em $w = 0$?

11. Verifique por cálculos que as linhas eqüipotenciais do Exemplo 7 são circunferências.

12. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Potenciais Complexos. Faça gráficos das linhas eqüipotenciais e das linhas de força em (a)–(d) (quatro gráficos, Re $F(z)$ e Im $F(z)$ nos mesmos eixos). A partir daí, analise alguns desses potenciais complexos com a finalidade de descobrir as configurações que possam ser de algum interesse prático.

(a) $F(z) = z^2$ **(b)** $F(z) = iz^2$

(c) $F(z) = 1/z$ **(d)** $F(z) = i/z$

13–15 POTENCIAIS PARA OUTRAS CONFIGURAÇÕES

13. Mostre que $F(z) = \arccos z$ (definida no Problema Proposto 13.7) fornece o potencial mostrado nas Figs. 398 e 399.

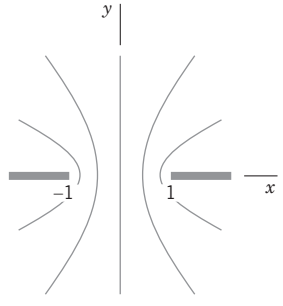


Fig. 398. Fenda

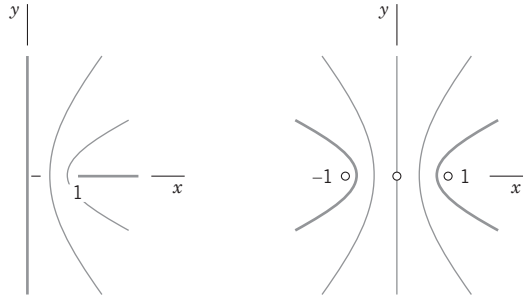


Fig. 399. Outras aberturas

14. Encontre os potenciais real e complexo no setor definido por $-\pi/6 \leqq \theta \leqq \pi/6$ entre o contorno $\theta = \pm\pi/6$ (mantido em 0) e a curva $x^3 - 3xy^2 = 1$, mantida em 110 V.

15. Obtenha o potencial no primeiro quadrante do plano xy entre os eixos (que apresentam potencial de 220 V) e a hipérbole $xy = 1$ (com um potencial de 110 V).

18.2 Uso do Mapeamento Conforme. Modelagem

Os potenciais complexos relacionam intimamente a teoria do potencial à análise complexa, como acabamos de observar. Outra forte relação resulta do uso dos mapas conformes na modelagem e resolução de **problemas de valores de contorno** para a equação de Laplace, ou seja, para encontrar a solução da equação num certo domínio levando-se em conta valores dados no contorno (**"Problema de Dirichlet";** veja também a Seção 12.5). Portanto, utilizam-se os mapas conformes para mapear um dado domínio sobre outro para o qual uma solução seja conhecida ou possa ser encontrada mais facilmente. A solução obtida é então novamente mapeada para o domínio inicial. Essa é a idéia. Esse procedimento é usado pelo fato de que funções harmônicas permanecem harmônicas sob a realização do mapeamento conforme.

TEOREMA 1

Funções Harmônicas sob o Mapeamento Conforme

Consideremos que Φ^* seja harmônica em um domínio D^* no plano w. Suponha que $w = u + iv = f(z)$ seja analítica no domínio D no plano z e mapeie D conformemente em D^*. Então, a função

$$\Phi(x, y) = \Phi^*(u(x, y), v(x, y)) \tag{1}$$

é harmônica em D.

PROVA Uma composição de funções analíticas é analítica, como se segue da regra da cadeia. Logo, tomando um conjugado harmônico $\Psi^*(u, v)$ de Φ^*, conforme definido na Seção 13.4 e compondo a função analítica $F^*(w) = \Phi^*(u, v) + i\Psi^*(u, v)$, concluímos que $F(z) = F^*(f(z))$ é analítica em D. Logo, sua parte real $\Phi(x, y) = \text{Re } F(z)$ é harmônica em D. Isso completa a prova.

Mencionamos sem demonstrar que, se D^* for simplesmente conectado (Seção 14.2), então o conjugado harmônico de Φ^* existe. Outra demonstração do Teorema 1 sem o uso do conjugado harmônico pode ser vista no Apêndice 4. ■

EXEMPLO 1 **Potencial entre Cilindros Não-coaxiais**

Modele o potencial eletrostático entre os cilindros C_1: $|z| = 1$ e C_2: $|z - 2/5| = 2/5$ da Fig. 400. Forneça então a solução para o caso em que C_1 está aterrado, $U_1 = 0$ V e C_2 tem o potencial $U_2 = 110$ V.

Solução. Mapeamos o disco unitário $|z| = 1$ sobre o disco unitário $|w| = 1$ de forma que C_2 seja mapeado sobre o cilindro C_2^*: $|w| = r_0$. De (3), Seção 17.3, uma transformação linear fracionária que mapeia o disco unitário sobre o disco unitário é

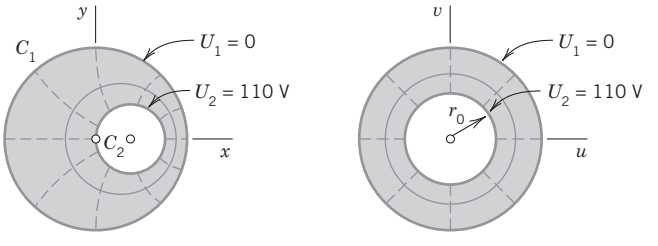
$$w = \frac{z - b}{bz - 1} \tag{2}$$

onde escolhemos $b = z_0$ real sem qualquer restrição. Aqui, z_0 não constitui nenhuma ajuda imediata, pois os centros de círculos em geral não são mapeados sobre centros das imagens. Entretanto, temos agora duas constantes livres b e r_0 e conseguiremos nosso intuito impondo duas condições razoáveis, a saber, que 0 e 4/5 (Fig. 400) devem ser mapeados sobre r_0 e $-r_0$, respectivamente. Isso fornece, por (2)

$$r_0 = \frac{0 - b}{0 - 1} = b, \qquad \text{e com isto,} \qquad -r_0 = \frac{4/5 - b}{4b/5 - 1} = \frac{4/5 - r_0}{4r_0/5 - 1},$$

uma equação quadrática em r_0 com as soluções $r_0 = 2$ (uma solução ruim, pois $r_0 < 1$) e $r_0 = 1/2$. Logo, nossa função de mapeamento (2) com $b = 1/2$ se converte na do Exemplo 5 da Seção 17.3,

$$w = f(z) = \frac{2z - 1}{z - 2}. \tag{3}$$



(a) plano *z* (b) plano *w*

Fig. 400. Exemplo 1

Do Exemplo 5 da Seção 18.1, escrevendo w no lugar de z, temos como potencial complexo no plano w a função $F^*(w) = a \operatorname{Ln} w + k$ e desse potencial real

$$\Phi^*(u, v) = \operatorname{Re} F^*(w) = a \ln|w| + k.$$

Este é o nosso modelo. Agora, determinamos a e k a partir das condições de contorno. Se $|w| = 1$, então $\Phi^* = a \ln 1 + k = 0$, logo $k = 0$. Se $|w| = r_0 = 1/2$, então $\Phi^* = a \ln(1/2) = 110$, portanto $a = 110/\ln(1/2) = -158{,}7$. Substituindo em (3), agora temos a solução desejada no domínio dado no plano z

$$F(z) = F^*(f(z)) = a \operatorname{Ln} \frac{2z - 1}{z - 2}.$$

O potencial real vale

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} F(z) = a \ln \left| \frac{2z - 1}{z - 2} \right|, \qquad a = -158{,}7.$$

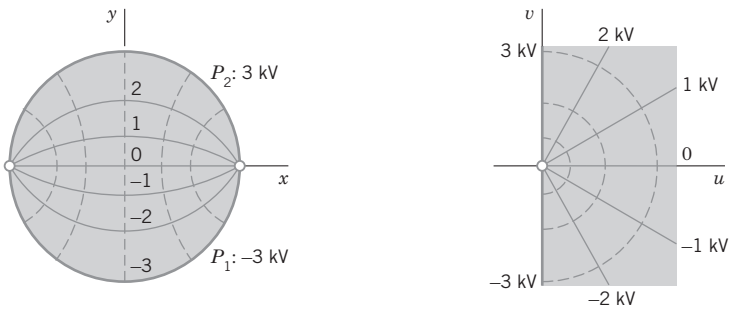
Podemos "ver" esse resultado? Bem, $\Phi(x, y) = const.$ se e somente se $|(2z - 1)/(z - 2)| = const.$, ou seja, $|w| = const.$ por (2) com $b = 1/2$. Esses círculos são imagens de círculos no plano z pois a inversa de uma transformação linear fracionária é linear fracionária (veja (4) da Seção 17.2), e, pelo Teorema 1 da Seção 17.2, qualquer mapeamento desse tipo mapeia círculos sobre círculos (ou linhas retas). Algo similar ocorre com os raios arg $w = const.$ Logo, as linhas eqüipotenciais $\Phi(x, y) = const.$ são círculos, e as linhas de força são arcos circulares (que aparecem tracejados na Fig. 400). Essas duas famílias de curvas interceptam-se ortogonalmente, isso é, em ângulos retos, como se vê na Fig. 400. ■

EXEMPLO 2 Potencial entre Duas Placas Semicirculares

Modele o potencial entre duas placas semicirculares P_1 e P_2 na Fig. 401a, considerando que os potenciais valem –3000 V e 3000 V, respectivamente. Use o Exemplo 3 da Seção 18.1 e o mapeamento conforme.

Solução. ***Etapa 1.*** Mapeamos a circunferência da Fig. 401a sobre a metade direita do plano w (Fig. 401b), usando a transformação linear fracionária do Exemplo 3 da Seção 17.3:

$$w = f(z) = \frac{1 + z}{1 - z}.$$



(a) plano z (b) plano w

Fig. 401. Exemplo 2

O contorno $|z| = 1$ é mapeado sobre o contorno $u = 0$ (o eixo u), com $z = -1, i, 1$ indo sobre $w = 0, i, \infty$, respectivamente, e $z = -i$ sobre $w = -i$. Logo, o semicírculo superior de $|z| = 1$ é mapeado sobre a metade superior, e o semicírculo inferior, sobre a metade inferior do eixo v, de modo que as condições de contorno do plano w são como as indicadas na Fig. 401b.

Etapa 2. Determinemos o potencial $\Phi^*(u, v)$ no semiplano direito do plano w. Do Exemplo 3 na Seção 18.1, com $\alpha = \pi$, $U_1 = -3000$ e $U_2 = 3000$ [com $\Phi^*(u, v)$ no lugar de $\Phi(x, y)$], temos

$$\Phi^*(u, v) = \frac{6000}{\pi} \varphi, \qquad \varphi = \arctan \frac{v}{u}.$$

Isso equivale a 3000 na metade positiva do eixo imaginário ($\varphi = \pi/2$) e a –3000 na metade negativa, como deveria ser. Φ^* é a parte real do potencial complexo

$$F^*(w) = -\frac{6000\, i}{\pi} \operatorname{Ln} w.$$

Etapa 3. Substituímos a função de mapeamento em F^* para obtermos o potencial complexo $F(z)$ da Fig. 401a na forma

$$F(z) = F^*(f(z)) = -\frac{6000\, i}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}.$$

A parte real disso é o potencial que desejamos determinar:

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} F(z) = \frac{6000}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z} = \frac{6000}{\pi} \operatorname{Arg} \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Como no Exemplo 1, concluímos que as linhas eqüipotenciais $\Phi(x, y) = const.$ são arcos circulares, pois correspondem a Arg $[(1 + z)/(1 - z)] = const.$ e, logo, a Arg $w = const.$ Além disso, Arg $w = const.$ corresponde a raios de 0 a ∞, que são as imagens de $z = -1$ e $z = 1$, respectivamente. Logo, todas as linhas eqüipotenciais têm -1 e 1 (pontos onde ocorrem saltos dos potenciais de contorno), do mesmo modo que suas extremidades (Fig. 401a). As linhas de força também são arcos circulares, e como elas devem ser ortogonais às linhas eqüipotenciais, seus centros podem ser obtidos como interseções das tangentes do círculo unitário com o eixo x (Explique!) ■

Outros exemplos podem ser facilmente construídos. Basta apenas considerar um mapeamento qualquer $w = f(z)$ do Capítulo 17, um domínio D no plano z, sua imagem D^* no plano w e um potencial Φ^* em D^*. Então, (1) fornece o potencial em D. Formule alguns exemplos você mesmo, envolvendo, por exemplo, transformações lineares fracionárias.

Comentário Básico sobre a Modelagem

Nesta seção, os exemplos apresentados foram modelos do potencial eletrostático. Entretanto, é muito importante perceber que isso é acidental. Poderíamos muito bem ter representado tudo isso em termos de condução de calor (independentemente do tempo); nesse caso, em vez de tensões, teríamos tido temperaturas, e as linhas eqüipotenciais tornar-se-iam isotermas (= linhas de temperatura constante), e as linhas da força elétrica teriam se tornado linhas ao longo das quais a condução do calor se processa das temperaturas mais altas para as mais baixas (na próxima seção, falaremos mais sobre isso). Ou poderíamos ter falado ainda sobre o escoamento de fluidos; nesse caso, as linhas de força eletrostática tornar-se-iam as linhas de corrente dos fluidos (veja mais na Seção 18.4). O que aqui podemos ver é o ***poder unificador da matemática:*** a possibilidade de, usando os mesmos métodos matemáticos, tratarmos de diferentes fenômenos e de sistemas que pertencem a diferentes áreas da física, mas que apresentam a mesma forma de modelagem. O que diferencia essas áreas são apenas os tipos de problemas que têm interesse prático.

PROBLEMAS PROPOSTOS 18.2

1. Verifique o Teorema 1 para $\Phi^*(u, v) = u^2 - v^2$, $w = f(z) = e^z$ e um domínio D qualquer.

2. Verifique o Teorema 1 para $\Phi^*(u, v) = uv$, $w = f(z) = e^z$ e D: $x \leqq 0$, $0 \leqq y \leqq \pi$. Esboce D e D^*.

3. Descreva detalhadamente todos os passos da segunda prova do Teorema 1 (mostrada no Apêndice 4).

4. Obtenha (3) a partir de (2).

5. Considere que D^* seja a imagem do retângulo D: $0 \leqq x \leqq \pi/2$, $0 \leqq y \leqq 1$ sob $w = \text{sen } z$ e $\Phi^*(u, v) = u^2 - v^2$. Obtenha o potencial correspondente Φ em D e seus valores de contorno.

6. O que aconteceria no Problema 5 se trocássemos o potencial pelo conjugado $\Phi^* = 2uv$? Faça um esboço ou gráfico de algumas das linhas eqüipotenciais $\Phi = const.$

7. PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Gráficos dos Campos de Potencial.

(a) Faça um gráfico das linhas eqüipotenciais dos Problemas. 1 e 2.

(b) Faça um gráfico das linhas eqüipotenciais se o potencial complexo for $F(z) = iz^2$, $F(z) = e^z$, $F(z) = ie^z$, $F(z) = e^{iz}$.

(c) Faça um gráfico das superfícies eqüipotenciais correspondentes a $F(z) = \ln z$ como cilindros no espaço.

8. PROJETO DE EQUIPE. Cilindros Não-coaxiais. Encontre o potencial entre os cilindros C_1: $|z| = 1$ (potencial $U_1 = 0$) e C_2: $|z - c| = c$ ($U_2 = 110$ V), onde $0 < c < \frac{1}{2}$. Faça um esboço ou gráfico das curvas eqüipotenciais e suas trajetórias ortogonais para $c = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4$. Tente pensar também como seria no caso de: C_1: $|z| = 1$, e C_2: $|z - c| = \rho \neq c$.

9. Encontre o potencial Φ na região R do primeiro quadrante do plano z limitada pelos eixos (com potencial U_1) e a hipérbole $y = 1/x$ (com potencial 0) de duas formas: (i) diretamente e (ii) mapeando R sobre uma faixa infinita.

10. (Extensão do Exemplo 2) Encontre a transformação linear fracionária $z = g(Z)$ que mapeia $|Z| \leqq 1$ sobre $|z| \leqq 1$ com $Z = i/2$ sendo mapeado sobre $z = 0$. Mostre que $Z_1 = 0{,}6 + 0{,}8i$ é mapeado sobre $z = -1$ e $Z_2 = -0{,}6 + 0{,}8i$ é mapeado sobre $z = 1$, de modo que, para $|Z| \leqq 1$, as linhas eqüipotenciais do Exemplo 2 parecem com as da Fig. 402.

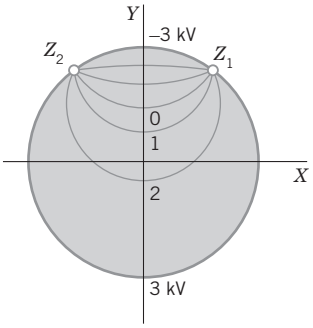


Fig. 402. Problema 10

11. As linhas eqüipotenciais do Problema 10 são círculos. Por quê?

12. Mostre que, no Exemplo 2, o eixo y é mapeado sobre o círculo unitário no plano w.

13. Encontre os potenciais real e complexo no semiplano superior com valores de contorno 0 se $x < 4$ e 10 kV se $x > 4$ no eixo x.

14. (Região angular) Aplicando adequadamente um mapeamento conforme, obtenha da Fig. 401b o potencial Φ na região angular $-\pi/4 < \text{Arg } z < \pi/4$ tal que $\Phi = -3$ kV se Arg $z = -\pi/4$ e $\Phi = 3$ kV se Arg $z = \pi/4$.

15. Em $z = \pm 1$ na Fig. 401a, as tangentes às linhas eqüipotenciais mostradas fazem entre si ângulos iguais ($\pi/6$). Por quê?

18.3 Problemas de Condução de Calor

A equação de Laplace também governa os problemas da condução de calor que são **estacionários**, ou seja, independentes do tempo. Com efeito, a condução de calor em um corpo de material homogêneo é modelada pela **equação do calor**

$$T_t = c^2\nabla^2 T$$

onde a função T é a temperatura, $T_t = \partial T/\partial t$, t é o tempo e c^2 é uma constante positiva (dependendo do material constituinte do corpo; veja a Seção 12.5). Logo, se o problema é estacionário, então $T_t = 0$, e em duas dimensões a equação do calor reduz-se a uma equação de Laplace bidimensional

$$\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0, \tag{1}$$

de modo que é possível tratar esse problema pelos métodos que estamos estudando.

$T(x, y)$ é o chamado **potencial de calor**, sendo a parte real do **potencial complexo de calor.**

$$F(z) = T(x, y) + i\Psi(x, y).$$

As curvas $T(x, y) = const.$ são chamadas de **isotermas** (= linhas de temperatura constante) e as curvas $\Psi(x, y) = const.$ são as **linhas de fluxo de calor,** pois ao longo delas ocorre o fluxo de calor das altas temperaturas para as baixas.

Isso significa que todos os exemplos até aqui considerados (Seções 18.1 e 18.2) agora podem ser reinterpretados como problemas de condução de calor. As linhas eqüipotenciais eletrostáticas $\Phi(x, y) = const.$ agora são isotermas $T(x, y) = const.$ e as linhas de força elétrica são linhas de condução de calor, como veremos nos dois problemas seguintes.

EXEMPLO 1 Temperatura entre Placas Paralelas

Encontre a temperatura entre duas placas paralelas $x = 0$ e $x = d$ na Fig. 403, com os valores de temperatura 0 e 100°C, respectivamente.

Solução. Assim como no Exemplo 1 da Seção 18.1, concluímos que $T(x, y) = ax + b$. Pelas condições de contorno, $b = 0$ e $a = 100/d$. A resposta é

$$T(x, y) = \frac{100}{d}\, x \ [°C].$$

O potencial complexo correspondente é $F(z) = (100/d)z$. O calor flui horizontalmente na direção negativa de x ao longo das linhas $y = const.$ ■

EXEMPLO 2 Distribuição de Temperatura entre um Cabo e um Cilindro

Obtenha o campo de temperatura ao redor de um cabo longo e fino de raio $r_1 = 1$ mm que é eletricamente aquecido a $T_1 = 500$°F e envolto por um cilindro circular de raio $r_2 = 100$ mm, o qual é mantido à temperatura $T_2 = 60$°F por meio de resfriamento com ar. Veja a Fig. 404. (O cabo está na origem do sistema de coordenadas.)

Solução. T depende somente de r por razões de simetria. Logo, como na Seção 18.1 (Exemplo 2),

$$T(x, y) = a \ln r + b.$$

As condições de contorno são

$$T_1 = 500 = a \ln 1 + b, \qquad T_2 = 60 = a \ln 100 + b.$$

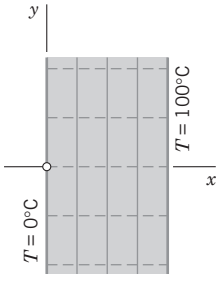


Fig. 403. Exemplo 1

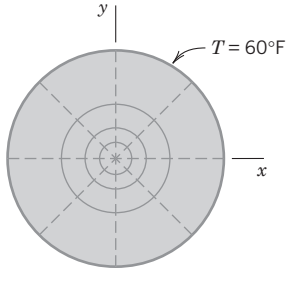


Fig. 404. Exemplo 2

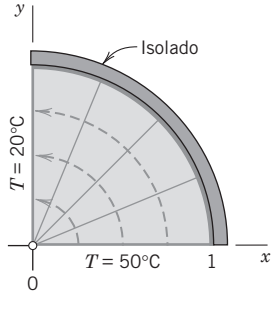


Fig. 405. Exemplo 3

Logo, $b = 500$ (uma vez que $\ln 1 = 0$) e $a = (60 - b)/\ln 100 = -95{,}54$. A resposta é

$$T(x, y) = 500 - 95{,}54 \ln r \ [^{\circ}\text{F}].$$

As isotermas são círculos concêntricos. O calor flui radialmente do cabo para o cilindro. Esboce o gráfico de T como uma função de r. Isso parece ser fisicamente razoável? ■

Matematicamente, os cálculos permanecem os mesmos na transição para outros campos de aplicação. Fisicamente, novos problemas podem surgir, com condições de contorno que podem não fazer sentido fisicamente ou que podem não ter interesse prático. Isso é ilustrado pelos dois próximos exemplos.

EXEMPLO 3 Um Problema Misto de Valor de Contorno

Encontre a distribuição de temperatura na região da Fig. 405 (seção transversal de um quarto de cilindro sólido) cuja porção vertical do contorno encontra-se a 20ºC, a porção horizontal está a 50ºC e a porção circular encontra-se isolada.

Solução. A porção isolada do contorno deve ser uma linha de fluxo de calor, uma vez que, devido ao isolamento, o calor é impedido de cruzar essa curva; logo, o calor deve escoar ao longo da curva. Portanto, as isotermas necessariamente interceptam a curva segundo ângulos retos. Como T é constante ao longo de uma isoterma, isso significa que

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{ao longo da porção isolada do contorno.} \tag{2}$$

Aqui, $\partial T/\partial n$ é a **derivada normal** de T, isto é, a derivada direcional (Seção 9.7) na direção normal (perpendicular) ao contorno isolado. Um problema desse tipo, que, para uma porção do contorno fornece T, e para a outra porção fornece $\partial T/\partial n$, é chamado de **problema misto de valores de contorno.**

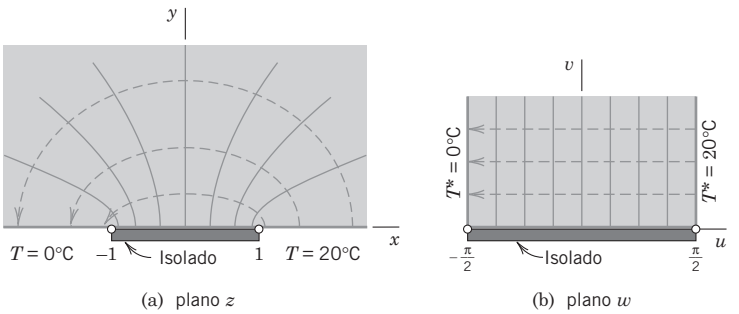
Em nosso caso, a direção normal à curva da contorno circular isolada é a direção radial apontada para a origem. Logo, (2) torna-se $\partial T/\partial r = 0$, significando que, ao longo dessa curva, a solução não pode depender de r. Agora, $\text{Arg } z = \theta$ satisfaz (1), assim como essa condição, e é constante (0 e $\pi/2$) nas porções retilíneas do contorno. Logo, a solução é da forma

$$T(x, y) = a\theta + b.$$

As condições de contorno dão $a \cdot \pi/2 + b = 20$ e $a \cdot 0 + b = 50$. Isso fornece

$$T(x, y) = 50 - \frac{60}{\pi}\,\theta, \qquad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

As isotermas são porções dos raios $\theta = const.$ O calor escoa do eixo x ao longo dos círculos $r = const.$ (tracejados na Fig. 405) em direção ao eixo y. ■



(a) plano z (b) plano w

Fig. 406. Exemplo 4

EXEMPLO 4 Outro Problema Misto de Valores de Fronteira na Condução do Calor

Obtenha o campo de temperatura no semiplano superior quando o eixo x é mantido em $T = 0$ºC para $x < -1$, é isolado para $-1 < x < 1$ e é mantido em $T = 20$ºC para $x > 1$ (Fig. 406a).

Solução. Mapeamos o semiplano da Fig. 406a sobre a faixa vertical da Fig. 406b, encontrando ali a temperatura $T^*(u, v)$, e fazemos o mapeamento inverso a fim de obtermos a temperatura $T(x, y)$ no semiplano.

A idéia de usar essa faixa é sugerida pela Fig. 388 da Seção 17.4, com os papéis de $z = x + iy$ e $w = u + iv$ trocados. A figura mostra que $z = \text{sen } w$ mapeia nossa faixa sobre o semiplano da Fig. 406a. Logo, a função inversa

$$w = f(z) = \text{arcsen } z$$

mapeia o semiplano sobre a faixa no plano w. Essa é a função de mapeamento de que precisamos, segundo o Teorema 1 da Seção 18.2.

O segmento isolado $-1 < x < 1$ no eixo x é mapeado sobre o segmento $-\pi/2 < u < \pi/2$ sobre o eixo u. O restante do eixo x é mapeado sobre duas porções verticais de contorno $u = -\pi/2$ e $\pi/2$, $v > 0$, da faixa. Isso fornece as condições de contorno transformadas da Fig. 406b para $T^*(u, v)$, onde no contorno horizontal isolado, $\partial T^*/\partial n = \partial T^*/\partial v = 0$, pois v é a coordenada normal a esse segmento.

Similarmente ao Exemplo 1, obtemos

$$T^*(u, v) = 10 + \frac{20}{\pi}\,u$$

que satisfaz a todas as condições de contorno. Essa é a parte real do potencial complexo $F^*(w) = 10 + (20/\pi)w$. Logo, o potencial complexo no plano z vale

$$F(z) = F^*(f(z)) = 10 + \frac{20}{\pi} \operatorname{arcsen} z$$

e $T(x, y) = \operatorname{Re} F(z)$ é a solução. As isotermas são $u = const.$ na faixa e as hipérboles no plano z, perpendiculares ao fluxo de calor que ocorre ao longo das elipses tracejadas, da porção de 20º até a porção de 0º do resfriador no contorno, um resultado fisicamente razoável. ■

Essa seção e a anterior mostram a utilidade dos mapas conformes e dos potenciais complexos. Estes últimos também desempenharão um papel na próxima seção, sobre o escoamento de fluidos.

PROBLEMAS PROPOSTOS 18.3

1. **PROJETO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Isotermas.** Faça gráficos das isotermas e das linhas de fluxo de calor para os Exemplos 2-4. Você pode ver pelos gráficos onde o fluxo de calor é mais rápido?
2. Encontre a temperatura e o potencial complexo numa placa infinita com bordas $y = x - 2$ e $y = x + 2$ mantidas a –10ºC e 20ºC, respectivamente.
3. Encontre a temperatura entre duas placas paralelas $y = 0$ e $y = d$ mantidas às temperaturas de 0ºC e 100ºC, respectivamente. (i) Faça o procedimento direto. (ii) Utilize o Exemplo 1 e um mapeamento adequado.
4. Encontre a temperatura T no setor $0 \leqq \operatorname{Arg} z \leqq \pi/3$, $|z| \leqq 1$ se $T =$ 20ºC no eixo x, $T = 50$ºC em $y = \sqrt{3}x$ e a porção curva encontra-se isolada.
5. Encontre a temperatura na Fig. 405 se $T = -20$ºC no eixo y, $T =$ 100ºC no eixo x e a porção circular do contorno encontra-se isolado como antes.
6. Interprete o Problema 10 da Seção 18.2 como um problema de fluxo de calor (com temperaturas de contorno de, digamos, 20ºC e 300ºC). Ao longo de quais curvas ocorre o fluxo de calor?
7. Encontre a temperatura e o potencial complexo no primeiro quadrante do plano z se o eixo y for mantido a 100ºC, o segmento $0 < x < 1$ do eixo x estiver isolado e a porção $x > 1$ do eixo x for mantida a 200ºC. *Sugestão*: use o Exemplo 4.
8. **PROJETO DE EQUIPE. Temperaturas de Contorno Constantes por Intervalo. (a) Um bloco de construção básico** é mostrado na Fig. 407. Encontre a temperatura e o potencial complexo correspondentes no semiplano superior.

   (b) Mapeamento conforme. Que temperatura no primeiro quadrante do plano z é obtida de (a) pelo mapeamento $w = a + z^2$ e quais são as condições de contorno transformadas?

   (c) Superposição. Encontre a temperatura T^* e o potencial complexo F^* no semiplano superior que satisfazem às condições de contorno da Fig. 408.

   (d) Faixa semi-infinita. Aplicando $w = \cosh z$ em (c), obtenha a solução do problema de valor de contorno da Fig. 409.

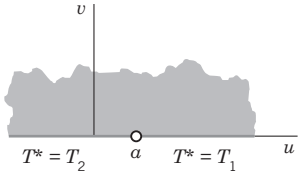


Fig. 407. Projeto de Equipe 8(a)

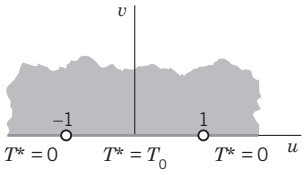


Fig. 408. Projeto de Equipe 8(c)

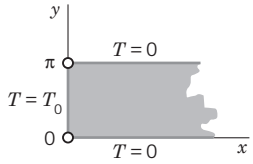
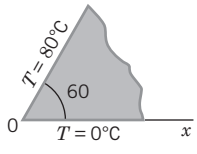


Fig. 409. Projeto de Equipe 8(d)

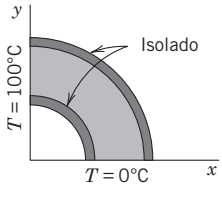
9–14 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA NAS PLACAS

Encontre a temperatura $T(x, y)$ na placa de metal dada cujas faces estão isoladas e cujas bordas são mantidas nas temperaturas indicadas ou são isoladas como mostrado.

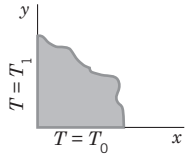
9.



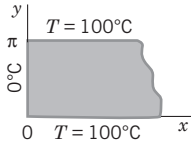
10.



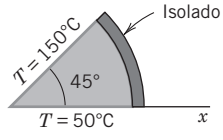
11.



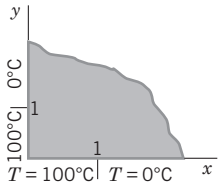
12.



13.



14.



18.4 Escoamento de Fluidos

A equação de Laplace também desempenha um papel fundamental em hidrodinâmica, no escoamento estacionário de fluidos não-viscosos sob condições físicas que discutiremos mais adiante nesta seção. Para podermos aplicar os métodos de analise complexa, nossos problemas serão ***bidimensionais*,** de modo que o **vetor velocidade** V pelo qual se fornece o movimento do fluido depende apenas de duas variáveis espaciais x e y, e o movimento do fluido é o mesmo em todos os planos paralelos ao plano xy.

Dessa forma, podemos usar para o vetor velocidade V uma função complexa

$$V = V_1 + iV_2 \tag{1}$$

que fornece a magnitude $|V|$ e a direção Arg V da velocidade em cada ponto $z = x + iy$. Aqui, V_1 e V_2 são os componentes da velocidade nas direções x e y. V é tangente à trajetória das partículas em movimento, sendo chamado chamado de **linha de corrente do movimento** do fluido (Fig. 410).

Mostramos que, sob suposições adequadas (que explicaremos em detalhes nos exemplos a seguir), para um dado escoamento existe uma função analítica

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \tag{2}$$

chamada de **potencial complexo** do escoamento, de tal forma que as linhas de corrente do movimento do fluido são dadas por $\Psi(x, y) = const.$, e o vetor velocidade ou, resumidamente, a **velocidade** é dada por

$$V = V_1 + iV_2 = \overline{F'(z)} \tag{3}$$

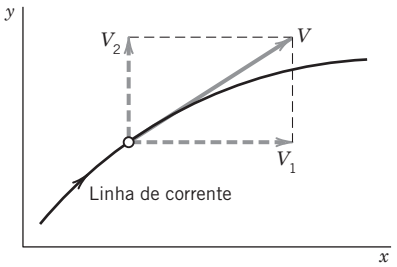


Fig. 410. Velocidade

onde a barra em $F'(z)$ denota o complexo conjugado. Ψ é chamada de **função de corrente**. A função Φ é chamada de **potencial de velocidade.** As curvas $\Phi(x, y) = const.$ são chamadas de **linhas eqüipotenciais.** O vetor velocidade V é o **gradiente** de Φ; por definição, isso significa que

$$V_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad V_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{4}$$

Com efeito, para $F = \Phi + i\Psi$, a Equação (4) da Seção 13.4 é $F' = \Phi_x + i\Psi_x$ com $\Psi_x = -\Phi_y$ pela segunda equação de Cauchy-Riemann. Juntando as equações, obtemos (3):

$$\overline{F'(z)} = \Phi_x - i\Psi_x = \Phi_x + i\Phi_y = V_1 + iV_2 = V.$$

Além disso, como $F(z)$ é analítica, Φ e Ψ satisfazem à equação de Laplace

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \qquad \nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Ao passo que, em eletrostática, os contornos (placas condutoras) são linhas eqüipotenciais, no escoamento de fluidos os contornos através dos quais o fluido não pode escoar devem corresponder a linhas de corrente do movimento. Logo, no escoamento de fluidos, a função de corrente é de particular importância.

Antes de discutirmos as condições para a validade das afirmações envolvendo (2)–(5), consideremos dois escoamentos de interesse prático, de modo que veremos primeiramente o que está se passando do ponto de vista prático. Outros escoamentos são apresentados em Problemas Propostos.

EXEMPLO 1 **Escoamento em torno de uma Cantoneira**

O potencial complexo $F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ modela o escoamento com

Linhas eqüipotenciais	$\Phi = x^2 - y^2 = const.$	(Hipérboles)
Trajetórias de escoamento	$\Psi = 2xy = const.$	(Hipérboles)

De (3), obtemos o vetor velocidade

$$V = 2\bar{z} = 2\,(x - iy), \quad \text{ou seja,} \quad V_1 = 2x, \quad V_2 = -2y.$$

A velocidade (módulo do vetor velocidade) vale

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Deve-se interpretar esse escoamento como o fluxo em um canal cujas fronteiras são os eixos coordenados positivos e uma hipérbole, digamos, $xy = 1$ (Fig. 411). Notamos que a velocidade ao longo de uma trajetória de escoamento S tem um mínimo no ponto P onde a seção transversal do canal é grande. ■

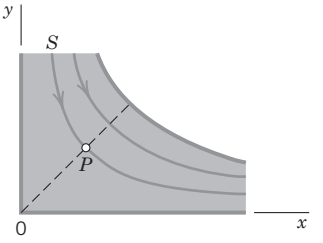


Fig. 411. Fluxo passando por uma cantoneira (Exemplo 1)

EXEMPLO 2 **Fluxo em Torno de um Cilindro**

Considere o potencial complexo

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) = z + \frac{1}{z}.$$

Usando a forma polar $z = re^{i\theta}$, obtemos

$$F(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}\,e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta.$$

Logo, as linhas de corrente são

$$\Psi(x, y) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta = const.$$

Em particular, $\Psi(x, y) = 0$ fornece $r - 1/r = 0$ ou $\operatorname{sen}\theta = 0$. Logo, as linhas de escoamento correspondem ao círculo unitário ($r = 1/r$ dá $r = 1$) e o eixo x ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$). Para um grande $|z|$, o termo $1/z$ em $F(z)$ tem módulo pequeno, de modo que, para esse z, o fluxo é aproximadamente uniforme e paralelo ao eixo x. Logo, podemos interpretar isso como um fluxo ao redor de um longo cilindro circular de raio unitário que é perpendicular ao plano z, interceptando-o no círculo unitário $|z| = 1$ e cujo eixo corresponde a $z = 0$.

O fluxo apresenta dois **pontos de estagnação** (isto é, pontos onde a velocidade V é nula), em $z = \pm 1$. Isso decorre de (3) e de

$$F'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}, \qquad \text{logo,} \qquad z^2 - 1 = 0. \qquad \text{(Veja a Fig. 412.)}$$ ■

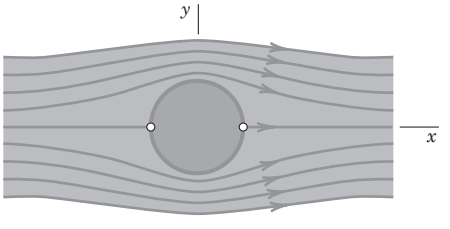


Fig. 412. Fluxo ao redor de um cilindro (Exemplo 2)

Suposições e Teorias Subjacentes (2)–(5)

TEOREMA 1 **Potencial Complexo de um Escoamento**

Se o domínio do escoamento for simplesmente conectado e o escoamento for irrotacional e incompressível, então as afirmações envolvendo (2)–(5) *são verdadeiras. Em particular, o fluxo tem então um potencial complexo* $F(z)$, *que é uma função analítica.* (Os termos serão explicados a seguir.)

PROVA Provemos esse teorema por meio de uma discussão acerca dos conceitos básicos relacionados ao escoamento de fluidos.

(a) ***Primeira Suposição: Irrotacionalidade***. Consideremos que C seja uma curva suave qualquer no plano z dada por $z(s) = x(s) + iy(s)$, onde s é o comprimento do arco de C. Façamos a variável real V_t ser a componente da velocidade V tangente a C (Fig. 413). Então, o valor da integral de linha real

(6)
$$\int_C V_t \, ds$$

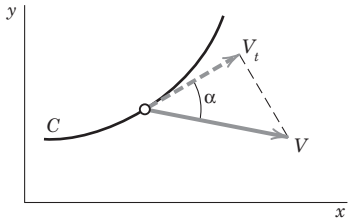


Fig. 413. Componente tangencial da velocidade numa curva C

considerada ao longo de C no sentido de crescimento de s é chamado de **circulação** do fluido ao longo de C, sendo o motivo desse nome dado no prosseguimento dessa demonstração. Dividindo a circulação pelo comprimento de C, obtemos a *velocidade média*[1] do fluxo ao longo da curva C. Agora,

$$V_t = |V| \cos \alpha \qquad \text{(Fig. 413).}$$

Logo, V_t é o produto escalar (Seção 9.2) de V e do vetor tangente dz/ds de C (Seção 17.1); portanto, em (6),

$$V_t \, ds = \left(V_1 \frac{dx}{ds} + V_2 \frac{dy}{ds} \right) ds = V_1 \, dx + V_2 \, dy.$$

A circulação (6) ao longo de C torna-se agora

(7)
$$\int_C V_t \, ds = \int_C (V_1 \, dx + V_2 \, dy).$$

Como uma próxima idéia, pensemos em C como uma ***curva fechada*** que satisfaz à suposição do Teorema de Green (Seção 10.4) e façamos de C o contorno de um domínio simplesmente conectado D. Suponhamos também que V possua derivadas parciais contínuas em um domínio contendo D e C. Então, podemos utilizar o Teorema de Green para representar a circulação ao redor de C por uma integral dupla,

(8)
$$\oint_C (V_1 \, dx + V_2 \, dy) = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

O integrando dessa integral dupla é chamado de **vorticidade** do escoamento. A vorticidade dividida por 2 é chamada de **rotação**

(9)
$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right).$$

Consideramos que o escoamento seja **irrotacional**, isto é, $\omega\,(x, y) \equiv 0$ por todo o escoamento; portanto,

(10)
$$\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0.$$

---

[1] *Definições:* $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ = **valor médio** de f no intervalo $a \leqq x \leqq b$,

$\dfrac{1}{L} \displaystyle\int_C f(s)\, ds$ = **valor médio** de f em C (L = comprimento de C),

$\dfrac{1}{A} \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ = **valor médio** de f em D (A = área de D).

Para entender o significado físico de vorticidade e rotação, considere em (8) que C seja uma circunferência de raio r. Então, a circulação dividida pelo comprimento $2\pi r$ de C é a velocidade média do fluido ao longo de C. Logo, dividindo isso por r, obtemos a **velocidade angular** média ω_0 do fluido em torno do centro da circunferência:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi r^2} \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \frac{1}{\pi r^2} \iint_D \omega(x, y)\, dx\, dy.$$

Se agora fizermos $r \to 0$, o limite de ω_0 será o valor de ω no centro de C. Logo, $\omega(x, y)$ é a velocidade angular limite de um elemento circular do fluido à medida que a circunferência se encolhe para o ponto (x, y). Grosso modo, *se um elemento esférico do fluido repentinamente se solidificasse e o fluido ao seu redor fosse simultaneamente aniquilado, esse elemento giraria com a velocidade angular* ω.

(b) ***Segunda Suposição: Incompressibilidade.*** Nossa segunda consideração é de que o fluido seja incompressível. (Os fluidos incluem os líquidos, que são incompressíveis, e os gases, como o ar, que são compressíveis.) Dessa forma,

$$\textbf{(11)} \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0$$

em toda região que seja livre de **fontes** ou **sorvedouros**, isto é, pontos nos quais respectivamente o fluido é produzido ou desaparece. A expressão em (11) é chamada de **divergente** de V, sendo denotada por div V. (Veja também (7) da Seção 9.8.)

(c) ***Potencial Complexo de Velocidade.*** Se o domínio D do escoamento for simplesmente conectado (Seção 14.2) e o fluxo for irrotacional, então (10) implica que a integral de linha (7) é independente do trajeto em D (pelo Teorema 3 da Seção 10.2, onde $F_1 = V_1$, $F_2 = V_2$, $F_3 = 0$, e z é a terceira coordenada espacial, que nada tem a ver o z que estamos utilizando). Logo, se integrarmos a partir de um ponto fixo (a, b) em D até um ponto variável (x, y) em D, a integral torna-se uma função do ponto (x, y), ou seja, $\Phi(x, y)$:

$$\textbf{(12)} \qquad \Phi(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} (V_1\, dx + V_2\, dy).$$

Dizemos que o escoamento possui um potencial de velocidade Φ, o qual é dado por (12). Para provarmos isso, tudo o que temos que fazer é mostrar que (4) se verifica. Agora, como a integral (7) independe do trajeto, $V_1 dx + V_2 dy$ é exata (Seção 10.2), ou seja, é a diferencial de Φ,

$$V_1\, dx + V_2\, dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy.$$

Disso, vemos que $V_1 = \partial\Phi/\partial x$ e $V_2 = \partial\Phi/\partial y$, o que fornece (4).

O fato de Φ ser harmônica decorre imediatamente da substituição de (4) em (11), o que resulta na primeira equação de Laplace em (5).

Finalmente tomamos o harmônico conjugado Ψ de Φ. Então, a outra equação em (5) se verifica. Além disso, como as derivadas parciais de segunda ordem de Ψ e Φ são contínuas, vemos que a função complexa

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

é analítica em D. Como as curvas $\Psi(x, y) = const.$ são perpendiculares às curvas eqüipotenciais $\Phi(x, y) = const.$ (exceto onde $F'(z) = 0$), concluímos que $\Psi(x, y) = const.$ são as linhas de corrente. Logo, Ψ é a função de corrente e $F(z)$ é o potencial complexo do fluxo. Isso conclui a demonstração do Teorema 1, assim como nossa discussão acerca das importantes funções da análise complexa no escoamento de fluidos compressíveis. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 18.4

1–15 PADRÕES DE FLUXO: LINHAS DE CORRENTE, POTENCIAL COMPLEXO

O propósito destes problemas é encorajá-lo(la) a fazer experiências com diversas funções $F(z)$, muitas das quais são usadas na modelagem de interessantes padrões de escoamento.

1. **(Fluxo paralelo)** Mostre que $F(z) = -iKz$ (K real positivo) descreve um escoamento uniforme para cima, que pode ser interpretado como um escoamento uniforme entre duas linhas paralelas (planos paralelos no espaço tridimensional). Veja Fig. 414. Encontre o vetor velocidade, as linhas de corrente e as linhas eqüipotenciais.
2. **(Mapeamento conforme)** Obtenha o escoamento no Exemplo 1 com base no escoamento do Problema 1, usando adequadamente um mapeamento conforme.

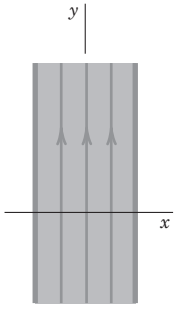


Fig. 414. Fluxo paralelo no Problema 1

3. Encontre o potencial complexo de um escoamento paralelo uniforme ao eixo x na direção positiva de x.

4. No Problema 1, o que acontece com o escoamento se substituirmos z por $ze^{-i\alpha}$ com uma constante α, por exemplo, $\alpha = \pi/4$?

5. Qual é o potencial complexo de um escoamento paralelo e dirigido para cima, na direção de $y = 2x$?

6. (Extensão do Exemplo 1) Esboce ou faça um gráfico do escoamento no Exemplo 1 sobre todo o semiplano superior. Mostre que você pode interpretá-lo como um escoamento contra uma parede horizontal (o eixo x).

7. No Exemplo 1, qual $F(z)$ seria adequado se o ângulo da cantoneira fosse de $\pi/3$?

8. Esboce ou faça um gráfico das linhas de corrente e das linhas eqüipotenciais de $F(z) = iz^3$. Obtenha V. Encontre todos os pontos nos quais V é paralela ao eixo x.

9. Encontre e faça um gráfico das linhas de corrente de $F(z) = z^2 + 2z$. Interprete o escoamento.

10. Mostre que $F(z) = iz^2$ modela um escoamento em torno de uma cantoneira. Esboce as linhas de corrente e as linhas eqüipotenciais. Encontre V.

11. (Potencial $F(z) = 1/z$) Mostre que as linhas de corrente de $F(z) = 1/z$ são circunferências passando pela origem.

12. (Cilindro) O que aconteceria no Exemplo 2 se substituíssemos z por z^2? Esboce e interprete o escoamento resultante no primeiro quadrante.

13. No Exemplo 2, modifique ligeiramente $F(z)$ para obter o fluxo ao redor de um cilindro de raio r_0 que forneça o fluxo do Exemplo 2 se $r_0 \to 1$.

14. (Abertura) Mostre que $F(z) = \text{arccosh } z$ fornece hipérboles confocais como linhas de corrente, com os focos situados em $z = \pm 1$, podendo-se interpretar o escoamento como aquele que se verifica ao longo de uma abertura (Fig. 415).

15. (Cilindro elíptico) Mostre que $F(z) = \arccos z$ fornece elipses confocais como linhas de fluxo, com os focos situados em $z = \pm 1$, e que o escoamento ocorre ao redor de um cilindro elíptico ou uma placa (o segmento de –1 a 1 na Fig. 416).

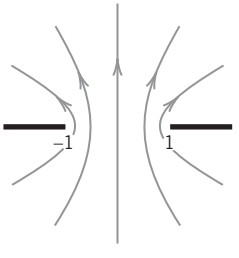


Fig. 415. Fluxo através de uma abertura no Problema 14

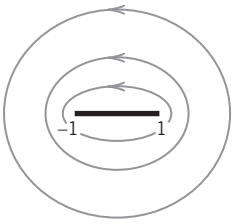


Fig. 416. Fluxo ao redor de uma placa no Problema 15

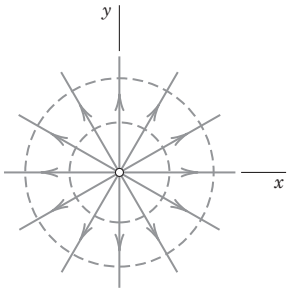


Fig. 417. Fonte pontual

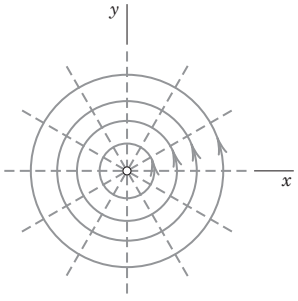


Fig. 418. Fluxo com vórtice

16. PROJETO DE EQUIPE. O Papel do Logaritmo Natural na Modelagem de Escoamentos. (a) Escoamentos básicos: Fonte e sorvedouro. Mostre que $F(z) = (c/2\pi) \ln z$ com c sendo uma constante real positiva fornece um escoamento direcionado radialmente para fora (Fig. 417), de modo que F modela uma **fonte pontual** em $z = 0$ (ou seja, uma **linha-fonte** $x = 0$, $y = 0$ no espaço) no qual o fluido é produzido. c é a chamada **força** ou **descarga** da fonte. Se c for um número real negativo, mostre que o escoamento é direcionado radialmente para dentro, de modo que F modela um **sorvedouro** em $z = 0$, um ponto no qual o fluido desaparece. Note que $z = 0$ é o ponto singular de $F(z)$.

(b) Fluxos básicos: vórtice. Mostre que $F(z) = -(Ki/2\pi)\ln z$ com K real positivo corresponde a um escoamento fazendo uma circulação anti-horária ao redor de $z = 0$ (Fig. 418). $z = 0$ é chamado de **vórtice.** Note que a cada volta que damos ao redor do vórtice o potencial aumenta de K.

(c) Adição de escoamentos. Mostre que a adição dos vetores velocidade de dois escoamentos fornece um escoamento cujo potencial complexo é obtido pela adição dos potenciais complexos dos dois escoamentos.

(d) Fonte e sorvedouro combinados. Encontre os potenciais complexos de um escoamento com uma fonte de intensidade 1 em $z = -a$ e um fluxo com um dissipador de intensidade 1 em $z = a$. Some ambos e esboce ou faça um gráfico das linhas de corrente. Mostre que, para um pequeno $|a|$, essas linhas são similares às do Problema 11.

(e) Fluxo com circulação em torno de um cilindro. Faça a soma do potencial em (b) com o do Exemplo 2. Mostre que isso fornece um escoamento para o qual a parede cilíndrica $|z| = 1$ é uma linha de corrente. Encontre a velocidade e mostre que os pontos de estagnação são

$$z = \frac{iK}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{-K^2}{16\pi^2} + 1}\ ;$$

se $K = 0$, eles estão em ± 1; à medida que K aumenta, eles se movem para cima sobre a circunferência unitária até se encontrarem em $z = i$ ($K = 4\pi$, veja a Fig. 419) e, se $K > 4\pi$, eles se situam sobre o eixo imaginário (um deles ficando no campo de escoamento e o outro dentro do cilindro, para o que não há significado físico).

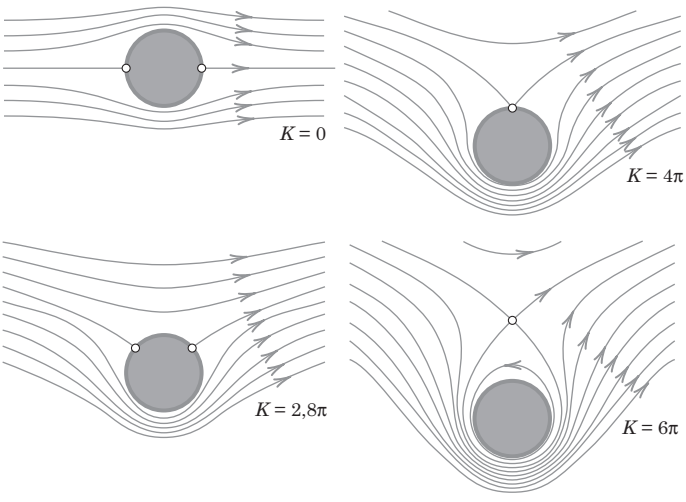


Fig. 419. Fluxo ao redor de um cilindro sem circulação ($K = 0$) e com circulação

18.5 Fórmula da Integral de Poisson para Potenciais

Até agora neste capítulo vimos que a análise complexa oferece poderosos métodos para a modelagem e solução de problemas de potencial bidimensionais, com base em mapeamentos conformes e potenciais complexos. Um outro método é obtido por meio da integração complexa, sendo seu resultado mais importante o fornecimento da fórmula da integral de Poisson (5) para potenciais em um domínio-padrão (um disco circular) e, com base em (5), o fornecimento de uma série útil (7) para esses potenciais. Logo, podemos resolver problemas para discos e então mapear as soluções conformemente sobre outros domínios.

A fórmula de Poisson decorrerá da fórmula da integral de Cauchy (Seção 14.3)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z^*)}{z^* - z}\, dz^*. \tag{1}$$

Aqui, C é a circunferência $z^* = Re^{i\alpha}$ (sentido anti-horário, $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$) e supomos que $F(z^*)$ seja analítica num domínio contendo C e todo o seu interior. Como $dz^* = iRe^{i\alpha}d\alpha = iz^*d\alpha$, obtemos de (1)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*)\, \frac{z^*}{z^* - z}\, d\alpha \qquad (z^* = Re^{i\alpha},\ z = re^{i\theta}). \tag{2}$$

Agora segue uma pequena artimanha. Se, em vez de z dentro de C, considerarmos Z fora de C, as integrais (1) e (2) são nulas segundo o teorema da integral de Cauchy (Seção 14.2). Escolhamos $Z = z^*\bar{z}^*/\bar{z} = R^2/\bar{z}$, que se encontra fora de C, visto que $|Z| = R^2/|z| = R^2/r > R$. De (2), temos, portanto,

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*)\, \frac{z^*}{z^* - Z}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*)\, \frac{z^*}{z^* - \dfrac{z^*\bar{z}^*}{\bar{z}}}\, d\alpha$$

e, fazendo uma simplificação direta na última expressão do lado direito,

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*)\, \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*}\, d\alpha.$$

Subtraímos isso de (2) e usamos a seguinte fórmula passível de verificação pelo cálculo direto ($\bar{z}z^*$ se cancela):

$$\frac{z^*}{z^* - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*} = \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})}\ . \tag{3}$$

Temos, então,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*)\, \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})}\, d\alpha. \tag{4}$$

Das representações polares de z e z^*, vemos que o quociente no integrando é real e igual a

$$\frac{R^2 - r^2}{(Re^{i\alpha} - re^{i\theta})(Re^{-i\alpha} - re^{-i\theta})} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha) + r^2}.$$

Agora, escrevemos $F(z) = \Phi(r, \theta) + i\Psi(r, \theta)$ e tomamos a parte real de ambos os lados de (4). Então, obtemos a **fórmula da integral de Poisson**[2]

$$\textbf{(5)} \qquad \Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha) + r^2}\,d\alpha.$$

Essa fórmula representa a função harmônica Φ no disco $|z| \leqq R$ em termos de seus valores $\Phi(R, \alpha)$ sobre o contorno (a circunferência) $|z| = R$.

Para a fórmula (5) ainda ser válida, basta que a função do contorno $\Phi(R, \alpha)$ seja contínua por intervalos (o que é um caso freqüente na prática; veja, por exemplo, a Fig. 401 da Seção 18.2). Logo, no disco aberto e sobre a circunferência $|z| = R$, (5) fornece uma função harmônica igual à função de contorno dado, exceto nos pontos onde esta última é descontínua. Uma prova disso pode ser encontrada na Ref. [D1] no Apêndice 1.

Séries para Potenciais em Discos

De (5), podemos obter um importante desenvolvimento de séries de Φ em termos de funções harmônicas simples. Lembremos que o quociente do integrando de (5) foi obtido de (3). Dizemos então que o lado direito de (3) é a parte real de

$$\frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{(z^* + z)(\bar{z}^* - \bar{z})}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} = \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z} - z^*\bar{z} + z\bar{z}^*}{|z^* - z|^2}.$$

Com efeito, o último denominador é real e o mesmo ocorre com $z^*\bar{z}^* - z\bar{z}$ no numerador, ao passo que $-z^*\bar{z} + z\bar{z}^* = 2i\,\mathrm{Im}\,(z\bar{z}^*)$ no numerador é um imaginário puro. Isso comprova o que acabamos de dizer. Agora, usando séries geométricas, obtemos (expandindo o denominador)

$$\text{(6)} \qquad \frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{1 + (z/z^*)}{1 - (z/z^*)} = \left(1 + \frac{z}{z^*}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n.$$

Como $z = re^{i\theta}$ e $z^* = Re^{i\alpha}$, temos

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{z}{z^*}\right)^n\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{r^n}{R^n}\,e^{in\theta}e^{-in\alpha}\right] = \left(\frac{r}{R}\right)^n\cos(n\theta - n\alpha).$$

No lado direito, $\cos(n\theta - n\alpha) = \cos n\theta\cos n\alpha + \mathrm{sen}\,n\theta\,\mathrm{sen}\,n\alpha$. Logo, de (6), obtemos

$$\text{(6*)} \qquad \begin{aligned}\mathrm{Re}\,\frac{z^* + z}{z^* - z} &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(\cos n\theta\cos n\alpha + \mathrm{sen}\,n\theta\,\mathrm{sen}\,n\alpha).\end{aligned}$$

Essa expressão é igual ao quociente em (5), como havíamos mencionado antes, e inserindo-a em (5) e integrando termo a termo de 0 a 2π em α, obtemos

$$\textbf{(7)} \qquad \Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\theta + b_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$

onde os coeficientes são [o 2 em (6*) cancela-se com o 2 em $1/2\pi$ em (5)]

$$\textbf{(8)} \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(R, \alpha)\,d\alpha, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(R, \alpha)\cos n\alpha\,d\alpha, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(R, \alpha)\,\mathrm{sen}\,n\alpha\,d\alpha,$$

[2] SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840), matemático e físico francês, professor em Paris desde 1809. Seus trabalhos abrangem teoria do potencial, equações diferenciais parciais (equação de Poisson, Seção 12.1) e probabilidade (Seção 24.7).

os coeficientes de Fourier de $\Phi(R, \alpha)$, veja a Seção 11.1. Agora, para $r = R$, a série (7) torna-se a série de Fourier de $\Phi(R, \alpha)$. Logo, a representação (7) será válida sempre que a função $\Phi(R, \alpha)$ dada possa ser representada no contorno por uma série de Fourier.

EXEMPLO 1 Problema de Dirichlet para o Disco Unitário

Encontre o potencial eletrostático $\Phi(r, \theta)$ no disco unitário $r < 1$ com os valores de contorno

$$\Phi(1, \alpha) = \begin{cases} -\alpha/\pi & \text{se} \quad -\pi < \alpha < 0 \\ \alpha/\pi & \text{se} \quad 0 < \alpha < \pi \end{cases} \qquad \text{(Fig. 420).}$$

Solução. Como $\Phi(1, \alpha)$ é par, $b_n = 0$ e, de (8), obtemos $a_0 = \frac{1}{2}$ e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} \frac{\alpha}{\pi} \cos n\alpha \, d\alpha + \int_{0}^{\pi} \frac{\alpha}{\pi} \cos n\alpha \, d\alpha\right] = \frac{2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1).$$

Logo, $a_n = -4/(n^2\pi^2)$ se n for ímpar, $a_n = 0$ se $n = 2, 4, \cdots$, e o potencial vale

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[r \cos\theta + \frac{r^3}{3^2} \cos 3\theta + \frac{r^5}{5^2} \cos 5\theta + \cdots\right].$$

A Fig. 421 mostra o disco unitário e algumas das linhas eqüipotenciais (curvas $\Phi = const.$). ■

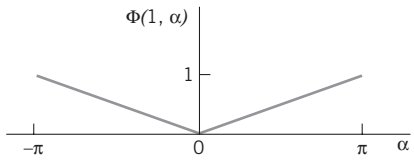


Fig. 420. Valores de contorno no Exemplo 1

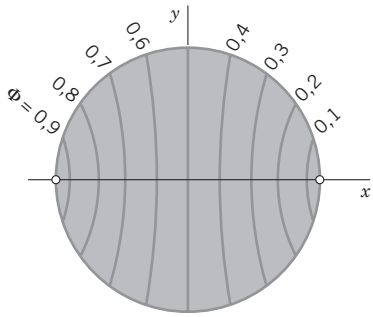


Fig. 421. Potencial no Exemplo 1

PROBLEMAS PROPOSTOS 18.5

1. Verifique (3).

2. Mostre que cada termo de (7) é uma função harmônica no disco $r < R$.

3. Forneça detalhes da derivação da série (7) da fórmula de Poisson (5).

4–13 FUNÇÕES HARMÔNICAS EM UM DISCO

Usando (7), encontre o potencial $\Phi(r, \theta)$ no disco unitário $r < 1$ com os valores de fronteira $\Phi(1, \theta)$ dados. Usando a soma dos primeiros termos da série, calcule alguns valores de Φ e esboce uma figura das linhas eqüipotenciais.

4. $\Phi(1, \theta) = \text{sen } 2\theta$

5. $\Phi(1, \theta) = 2 \text{ sen}^2 \theta$

6. $\Phi(1, \theta) = \cos^2 5\theta$

7. $\Phi(1, \theta) = \theta$ se $-\pi < \theta < \pi$

8. $\Phi(1, \theta) = \theta$ *se* $0 < \theta < 2\pi$

9. $\Phi(1, \theta) = \text{sen}^3 2\theta$

10. $\Phi(1, \theta) = \cos^4 \theta$

11. $\Phi(1, \theta) = \theta^2$ se $-\pi < \theta < \pi$

12. $\Phi(1, \theta) = 1$ se $-\pi/2 < \theta < \pi/2$
$\Phi(1, \theta) = 0$ se $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$

13. $\Phi(1, \theta) = \theta$ se $-\pi/2 < \theta < \pi/2$
$\Phi(1, \theta) = \pi - \theta$ se $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$

14. PROJETO DE EQUIPE. Potencial em um Disco. (a) Propriedade do valor médio. Mostre que o valor de uma função harmônica Φ no centro de uma circunferência C é igual à média do valor de Φ sobre C (veja a definição de valores médios na Seção 18.4, nota de rodapé 1).

(b) Separação de variáveis. Mostre que os termos de (7) aparecem como soluções ao se separar a equação de Laplace em coordenadas polares.

(c) Conjugado harmônico. A partir de (7), encontre uma série para o conjugado harmônico Ψ de Φ.

(d) Séries de potências. Encontre uma série para $F(z) = \Phi + i\Psi$.

15. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Série (7). Escreva um programa para o desenvolvimento da série (7). Faça experiências com a acurácia, calculando valores por meio de somas parciais e comparando-os com os valores obtidos graficamente. Faça isso **(a)** para o Exemplo 1 e Fig. 421, **(b)** para Φ no Problema 8 (que é descontínua no contorno!), **(c)** para um Φ de sua escolha com valores de contorno contínuos e **(d)** para Φ com valores de contorno descontínuos.

18.6 Propriedades Gerais das Funções Harmônicas

Com freqüência é simples obter as propriedades gerais das funções harmônicas por meio das propriedades das funções analíticas. Especificamente, as importantes propriedades de valores médios das funções harmônicas decorrem diretamente dessas propriedades das funções analíticas. Os detalhes disso são os seguintes.

TEOREMA 1

Propriedade do Valor das Funções Analíticas

Consideremos que $F(z)$ seja analítica em um domínio D simplesmente conectado. Então, o valor de $F(z)$ num ponto z_0 em D corresponde ao valor médio de $F(z)$ sobre uma circunferência qualquer em D com o centro em z_0.

PROVA Na fórmula da integral de Cauchy (Seção 14.3)

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz \tag{1}$$

escolhemos para C a circunferência $z = z_0 + re^{i\alpha}$ em D. Logo, $z - z_0 = re^{i\alpha}$, $dz = ire^{i\alpha}d\alpha$, e (1) torna-se

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{i\alpha})\, d\alpha. \tag{2}$$

O lado direito dessa equação é o valor médio de F sobre o círculo (= valor da integral dividido pelo comprimento 2π do intervalo de integração). Isso prova o teorema. ■

Para as funções harmônicas, o Teorema 1 implica o

TEOREMA 2

Duas Propriedades de Valor Médio das Funções Harmônicas

Consideremos que $\Phi(x, y)$ seja harmônica em um domínio simplesmente conectado D. Então, o valor de $\Phi(x, y)$ num ponto (x_0, y_0) em D corresponde ao valor médio de $\Phi(x, y)$ sobre uma circunferência qualquer em D com centro em (x_0, y_0). Esse valor também corresponde ao valor médio de $\Phi(x, y)$ num disco circular qualquer em D com o centro em (x_0, y_0).[Ver a nota de rodapé 1 da Seção 18.4.]

PROVA A primeira parte do teorema decorre de (2), tomando-se a parte real em ambos os lados,

$$\Phi(x_0, y_0) = \text{Re } F(x_0 + iy_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r\cos\alpha, y_0 + r \text{ sen } \alpha)\, d\alpha.$$

A segunda parte do teorema vem da integração dessa fórmula de 0 a r_0 (o raio do disco) em r, seguida da divisão por $r_0^2/2$,

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r\cos\alpha, y_0 + r \text{ sen } \alpha) r\, d\alpha\, dr. \tag{3}$$

O lado direito corresponde ao valor médio indicado (a integral dividida pela área da região de integração). ■

Voltando às funções analíticas, agora enunciaremos e provaremos uma outra famosa conseqüência da fórmula da integral de Cauchy. A prova é indireta e dá uma boa idéia da aplicação da desigualdade *ML*. (Uma *região de contorno* é uma região situada inteiramente dentro de um círculo que encerra a origem.)

TEOREMA 3

Teorema do Valor Máximo para Funções Analíticas

Consideremos que $F(z)$ seja analítica e não-constante em um domínio contendo uma região limitada R e seu contorno. Então, o valor absoluto $|F(z)|$ não pode apresentar um máximo num ponto interno de R. Conseqüentemente, o máximo de $|F(z)|$ é tomado sobre o contorno de R. Se $F(z) \neq 0$ em R, o mesmo vale para o mínimo de $|F(z)|$.

PROVA Vamos supor que $|F(z)|$ tenha um máximo num ponto z_0 interior a R, e mostraremos que isso nos leva a uma contradição. Digamos que $|F(z_0)| = M$ seja esse máximo. Como $F(z)$ não é constante, $|F(z)|$ também não é, como decorre do Exemplo 3 da Seção 13.4. Conseqüentemente, podemos encontrar um circulo C de raio r com centro em z_0 tal que o interior de C esteja em R e $|F(z)|$ seja menor que M em algum ponto P de C. Como $|F(z)|$ é contínuo, ele será menor que M num arco C_1 de C que contém P (veja a Fig. 422), digamos

$$|F(z)| \leqq M - k \qquad (k > 0) \qquad \text{para todo } z \text{ em } C_1.$$

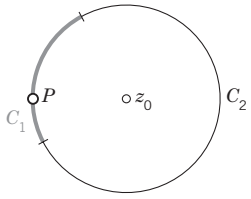


Fig. 422. Demonstração do Teorema 3

Façamos C_1 ter o comprimento L_1. Então, o arco complementar C_2 de C tem o comprimento $2\pi r - L_1$. Aplicamos agora a desigualdade ML (Seção 14.1) a (1) e observamos que $|z - z_0| = r$. Então, obtemos (usando o cálculo direto na segunda linha da fórmula)

$$M = |F(z_0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_1} \frac{F(z)}{z - z_0}\,dz\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_2} \frac{F(z)}{z - z_0}\,dz\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{M - k}{r}\right)L_1 + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{M}{r}\right)(2\pi r - L_1) = M - \frac{kL_1}{2\pi r} < M$$

ou seja, $M < M$, o que é impossível. Logo, nossa suposição é falsa, de modo que isso prova o que havia sido dito anteriormente.

Provemos a seguir a segunda declaração. Se $F(z) \neq 0$ em R, então $1/F(z)$ é analítica em R. Da declaração já provada, decorre que o máximo de $1/|F(z)|$ situa-se sobre o contorno de R. Porém esse máximo corresponde ao mínimo de $F(z)$. Isso completa a demonstração. ■

Esse teorema apresenta uma série de conseqüências fundamentais para as funções harmônicas, como se segue.

TEOREMA 4 **Funções Harmônicas**

Consideremos que $\Phi(x, y)$ seja harmônica num domínio contendo uma região de contorno simplesmente conectada R e sua curva de contorno C. Então:

(I) (Princípio do máximo) *Se $\Phi(x, y)$ não é constante, ela não tem nem máximo nem mínimo em R. Conseqüentemente, o máximo e o mínimo são tomados sobre o contorno de R.*

(II) *Se $\Phi(x, y)$ é constante sobre C, então $\Phi(x, y)$ é uma constante.*

(III) *Se $h(x, y)$ é harmônica em R e sobre C e se $h(x, y) = \Phi(x, y)$ sobre C, então $h(x, y) = \Phi(x, y)$ em qualquer lugar de R.*

PROVA **(I)** Façamos $\Psi(x, y)$ ser uma função conjugada harmônica de $\Phi(x, y)$ em R. Então, a função complexa $F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ é analítica em R, o mesmo ocorrendo com $G(z) = e^{F(z)}$. Seu valor absoluto é

$$|G(z)| = e^{Re\ F(z)} = e^{\Phi(x,\ y)}.$$

Do Teorema 3, segue que $|G(z)|$ não pode apresentar um máximo num ponto interior de R. Uma vez que e^{Φ} é uma função monotonicamente crescente da variável real Φ, a afirmação sobre o máximo de Φ se verifica. Com isso, a afirmação sobre o mínimo de Φ decorre pela substituição de Φ por $-\Phi$.

(II) De (I), a função $\Phi(x, y)$ possui seu máximo e seu mínimo sobre C. Portanto, se $\Phi(x, y)$ é constante sobre C, seu mínimo deverá ser igual ao máximo, de modo que $\Phi(x, y)$ deve ser constante.

(III) Se h e Φ são harmônicas em R e sobre C, então $h - \Phi$ é também harmônica em R e C, e, por suposição, $h - \Phi = 0$ em todo C. Portanto, de (II), temos $h - \Phi = 0$ em todo R e (III) fica provado. ■

A última afirmação do Teorema 4 é muito importante. Ela nos diz que *uma função harmônica é unicamente determinada em R por seus valores sobre o contorno de R*. Usualmente, requer-se que $\Phi(x, y)$ seja harmônica em R e contínua sobre o contorno de R, isto é,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \Phi(x, y) = \Phi(x_0, y_0), \text{ onde } (x_0, y_0) \text{ situa-se sobre o contorno e } (x, y) \text{ está em } R.$$

Sob essas suposições, o princípio do máximo (I) é ainda aplicável. O problema da determinação de $\Phi(x, y)$ quando os valores do contorno são dados é chamado de **problema de Dirichlet** para a equação de Laplace em duas variáveis, como já sabemos. De (III) temos, assim, como destaque de nossa discussão, o

TEOREMA 5 **Teorema da Unicidade para o Problema de Dirichlet**

Se, para uma dada região e para dados valores de contorno, o problema de Dirichlet para a equação de Laplace em duas variáveis tiver solução, essa solução será única.

PROBLEMAS PROPOSTOS 18.6

1. Integre $|z|^2$ ao longo da circunferência unitária. O seu resultado contradiz o Teorema 1?

2–4 **VERIFIQUE O TEOREMA 1** para os valores dados de $F(z)$, z_0 e a circunferência de raio 1.

2. $(z + 1)^3$, $z_0 = 2$

3. $(z - 2)^2$, $z_0 = \frac{1}{3}$

4. $10z^4$, $z_0 = 0$

5–7 **VERIFIQUE O TEOREMA 2** para os valores dados de $\Phi(x, y)$, (x_0, y_0) e a circunferência de raio 1.

5. $(x - 2)(y - 2)$,$(4, -4)$

6. $x^2 - y^2$, $(3, 8)$

7. $x^3 - 3xy^2$, $(1, 1)$

8. Demonstre o Teorema 2 a partir da fórmula da integral de Poisson.

9. EXPERIMENTO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL. Gráfico dos Potenciais. Faça gráficos dos potenciais para os Problemas 5 e 7 e para três outras funções de sua escolha, como superfícies sobre um retângulo ou disco no plano xy. Localize os pontos de máximo e mínimo inspecionando esses gráficos.

10. PROJETO DE EQUIPE. Módulo Máximo de Funções Analíticas. (a) Verifique o Teorema 3 para (i) $F(z) = z^2$ e o quadrado $4 \leqq x \leqq 6$, $2 \leqq y \leqq 4$, (ii) $F(z) = e^{3z}$ e algum domínio limitado, (iii) $F(z) = \operatorname{sen} z$ e o disco unitário.

(b) $F(z) = \cos x$ (x real) possui um máximo 1 em 0. Com base nisso, por que este ponto não pode ser um máximo de $|F(z)| = |\cos z|$ num domínio contendo $z = 0$?

(c) $F(z) = 1 + |z|^2$ não é nula no disco $|z| \leqq 4$ e possui um mínimo em um ponto interior a esse disco. Isso contradiz o Teorema 3?

(d) Se $F(z)$ for analítica e não-constante no disco unitário fechado D: $|z| \leqq 1$ e $|F(z)| = c = const.$ sobre a circunferência unitária, mostre que $F(z)$ deve ser zero em D. É possível estender esse raciocínio para a uma curva fechada simples arbitrária?

11–13 **MÓDULO MÁXIMO**

Encontre a localização e a medida do valor máximo de $|F(z)|$ no disco unitário $|z| \leqq 1$.

11. $F(z) = z^2 - 1$

12. $F(z) = az + b$ (a, b complexos)

13. $F(z) = \cos 2z$

14. Verifique o princípio do máximo valor para $\Phi(x, y) = e^x \cos y$ e o retângulo $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$.

15. (Conjugado) Na região R, podem Φ e o conjugado harmônico Ψ de Φ terem seus valores máximos no mesmo ponto de R?

16. (Mapeamento conforme) Encontre a localização (u_1, v_1) do máximo de $\Phi^* = e^u \cos v$ em R^*: $|w| \leqq 1$, $v \geqq 0$, onde $w = u + iv$. Encontre a região R que é mapeada sobre R^* por $w = f(z) = z^2$. Encontre o potencial em R resultante de Φ^* e a localização (x_1, y_1) do máximo. É (u_1, v_1) a imagem de (x_1, y_1)? Em caso afirmativo, teria isso ocorrido apenas por acaso?

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 18

1. Por que é possível usar a análise complexa para modelar e resolver os problemas de potencial? Para quais dimensões?

2. O que é uma função harmônica? E um conjugado harmônico?

3. Dê alguns exemplos dos problemas de potencial considerados neste capítulo.

4. O que é um potencial complexo? O que ele nos informa fisicamente?

5. De que modo o mapeamento conforme pode ser usado em conexão com o problema de Dirichlet?

6. Quais problemas de fluxo de calor se reduzem a problemas de potencial? Dê alguns exemplos.

7. Escreva de memória um pequeno texto sobre a teoria do potencial aplicada ao escoamento de fluidos.

8. O que é um problema misto de valores de contorno? Onde ele ocorre?

9. Forneça a fórmula de Poisson e sua demonstração a partir da fórmula de Cauchy.

10. Enuncie o teorema do módulo máximo e o teorema do valor médio para as funções harmônicas.

11. Encontre o potencial e o potencial complexo entre as placas $y = x$ e $y = x + 10$ mantidas em 10 V e 110 V, respectivamente.

12. Encontre o potencial entre os cilindros $|z| = 1$ cm com potencial 0 e $|z| = 10$ cm com potencial de 20 kV.

13. Encontre o potencial complexo do Problema 12.

14. Encontre a linha eqüipotencial $U = 0$ V entre os cilindros $|z| =$ 0,25 cm e $|z| = 4$ cm mantidos a –220 V e 220 V, respectivamente. (Tente primeiro responder por palpite.)

15. Encontre o potencial entre os cilindros $|z| = 10$ cm e $|z| = 100$ cm mantidos a 10 kV e 0 V, respectivamente.

16. Encontre o potencial na região angular entre as placas Arg $z = \pi/6$, mantida a 8 kV, e Arg $z = \pi/3$, mantida a 6 kV.

17. Encontre as linhas eqüipotenciais de $F(z) = i$ Ln z.

18. Encontre e esboce as linhas eqüipotenciais de $F(z) = (1 + i)/z$.

19. Qual é o potencial complexo no semiplano superior se a metade negativa do eixo x tem o potencial de 1 kV e a metade positiva encontra-se aterrada?

20. Encontre o potencial sobre o raio $y = x$, $x > 0$, e sobre a metade positiva do eixo x se a metade positiva do eixo y encontra-se a 1200 V e a metade negativa está aterrada.

21. Interprete o Problema 20 como um problema de condução de calor.

22. Encontre a temperatura no semiplano superior se a porção $x > 2$ do eixo x é mantida a 50ºC e a outra porção a 0ºC.

23. Mostre que as isotermas de $F(z) = -iz^2 + z$ são hipérboles.

24. Se a região entre dois cilindros concêntricos de raios 2 cm e 10 cm contém água e o cilindro externo é mantido a 20ºC, a qual temperatura deve ser aquecido o cilindro interno para que se tenha uma temperatura de 30ºC a uma distância de 5 cm do eixo?

25. Quais são as linhas de fluxo de $F(z) = i/z$?

26. Qual o potencial complexo de um fluxo ao redor de um cilindro de raio 4 sem circulação?

27. Encontre o potencial complexo de uma fonte em $z = 5$. Quais são as linhas de corrente?

28. Encontre a temperatura em um disco unitário $|z| \leqq 1$ na forma de uma série infinita se o semicírculo esquerdo de $|z| = 1$ tem a temperatura de 50ºC, e o semicírculo direito, a temperatura de 0ºC.

29. Faça o mesmo do Problema 28, considerando agora que o semicírculo superior está a 40ºC e o inferior a 0ºC.

30. Encontre uma série para o potencial no disco unitário com valores de contorno $\Phi(1, \theta) = \theta^2$ $(-\pi < \theta < \pi)$.

RESUMO DO CAPÍTULO 18

Análise Complexa e Teoria do Potencial

A **teoria do potencial** é a que trata da solução da **equação de Laplace**

$$\nabla^2\Phi = 0. \tag{1}$$

Soluções cujas derivadas parciais de segunda ordem são ***contínuas*** são chamadas de **funções harmônicas**. A Equação (1) é a mais importante EDP (Equação Diferencial Parcial) da física, sendo importante em duas e três dimensões. Ela aparece na eletrostática (Seção 18.1), nos problemas de condução estacionária de calor (Seção 18.3), no escoamento de fluidos (Seção 18.4), em gravitação etc. Ao passo que a situação tridimensional requer outros métodos (veja o Capítulo 12), a teoria do potencial bidimensional pode ser manipulada pela análise complexa, desde que as partes real e imaginária de uma função analítica sejam harmônicas (Seção 13.4). Elas permanecem harmônicas mesmo sujeitas ao mapeamento conforme (Seção 18.2), de modo que o **mapeamento conforme** torna-se uma poderosa ferramenta na solução de problemas de valores de contorno para (1), como está ilustrado neste capítulo. A um potencial real Φ em (1), podemos associar um **potencial complexo**

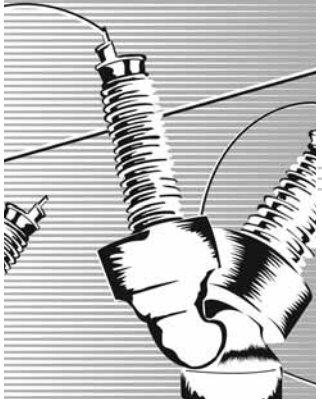
$$F(z) = \Phi + i\Psi \tag{2}$$

(Seção 18.1)

Então, ambas as famílias de curvas $\Phi = const.$ e $\Psi = const.$ têm um significado físico. Em eletrostática, elas são linhas eqüipotenciais e linhas de força elétrica (Seção 18.1). Em problemas de condução de calor, elas são isotermas (curvas de temperatura constante) e linhas de fluxo de calor (Seção 18.3). No escoamento de fluidos, elas são linhas eqüipotenciais do potencial de velocidade e linhas de corrente (Seção 18.4).

Para o disco, a solução do problema de Dirichlet é dada pela **fórmula de Poisson** (Seção 18.5) ou por uma série que, sobre a circunferência de contorno, torna-se a série de Fourier dos valores de contorno dados (Seção 18.5).

As funções harmônicas, como as funções analíticas, têm uma série de propriedades gerais; particularmente importantes são a **propriedade do valor médio** e a **propriedade do módulo máximo** (Seção 18.6), que implicam na unicidade da solução do problema de Dirichlet (Teorema 5 da Seção 18.6).



APÊNDICE 1

Referências

Referências Gerais

[RG1] Abramowitz, M. and I. A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*. 10ª impressão, corrigida. Washington, DC: National Bureau of Standards. 1972 (também New York: Dover, 1965).

[RG2] Cajori, F., *History of Mathematics*. 5th ed. Reprinted. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002.

[RG3] Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. 2 vols. Hoboken, NJ: Wiley, 2003.

[RG4] Courant, R., *Differential and Integral Calculus*. 2 vols. Hoboken, NJ: Wiley, 2003.

[RG5] Graham, R. L. et al., *Concrete Mathematics*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

[RG6] Ito, K. (ed.), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. 4 vols. 2nd ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1993.

[RG7] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Wiley, 1989.

[RG8] Kreyszig, E., *Differential Geometry*. Mineola, NY: Dover, 1991.

[RG9] Kreyszig, E. *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*. Toronto: University of Toronto Press, 1975.

[RG10] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials*. 4th ed. Reprinted. New York: American Mathematical Society, 2003.

[RG11] Thomas, G. et al., *Thomas' Calculus, Early Transcendentals Update*. 10th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 2003.

Parte C. Análise de Fourier e EDPs (Capítulos 10–11)

Sobre livros de *métodos numéricos* para EDPs, *veja também* a Parte E : Análise Numérica.

[C1] Antimirov, M. Ya., *Applied Integral Transforms*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1993.

[C2] Bracewell, R., *The Fourier Transform and Its Applications*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2000.

[C3] Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Reimpressão. Oxford: Clarendon, 1986.

[C4] Churchill, R. V. and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2000.

[C5] DuChateau, P. and D. Zachmann, *Applied Partial Differential Equations*. Mineola, NY: Dover, 2001.

[C6] Hanna, J. R. and J. H. Rowland, *Fourier Series, Transforms, and Boundary Value Problems*. 2nd ed. New York: Wiley, 1990.

[C7] Jerri, A. J., *The Gibbs Phenomenon in Fourier Analysis, Splines, and Wavelet Approximations*. Boston: Kluwer, 1998.

[C8] John, F., *Partial Differential Equations*. New York: Springer, 1995.

[C9] Tolstov, G. P., *Fourier Series*. New York: Dover, 1976.

[C10] Widder, D. V., *The Heat Equation*. New York: Academic Press, 1975.

[C11] Zauderer, E., *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 2nd ed. New York: Wiley, 1989.

[C12] Zygmund, A. and R. Fefferman, *Trigonometric Series*. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2003.

Parte D. Análise Complexa (Capítulos 13–18)

[D1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1979.

[D2] Bieberbach, L., *Conformal Mapping*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000.

[D3] Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis*. 3 vols. New York: Wiley, 1993.

[D4] Hille, E., *Analytic Function Theory*. 2 vols. 2nd ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.

[D5] Knopp, K., *Elements of the Theory of Functions*. New York: Dover, 1952.

[D6] Knopp, K., *Theory of Functions*. 2 parts. New York: Dover, 1945, 1947.

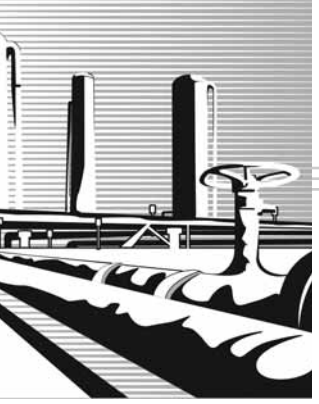
[D7] Krantz, S. G., *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1990.

[D8] Lang, S., *Complex Analysis*. 3rd ed. New York: Springer, 1993.

[D9] Narasimhan, R., *Compact Riemann Surfaces*. New York: Springer, 1996.

[D10] Nehari, Z., *Conformal Mapping*. Mineola, NY: Dover, 1975.

[D11] Springer, G., *Introduction to Riemann Surfaces*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002.



APÊNDICE 2

Respostas dos Problemas de Número Ímpar

Problemas Propostos 11.1

3. $2\pi/n$, $2\pi/n$, k, k, k/n, k/n

13. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\cos x - \dfrac{1}{3}\cos 3x + \dfrac{1}{5}\cos 5x - + \cdots\right)$

15. $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

17. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right) + \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - + \cdots$

19. $-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right) + 2\left(\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right)$

21. $\dfrac{1}{3}\pi^2 - 4\left(\cos x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{9}\cos 3x - + \cdots\right)$

23. $\dfrac{1}{6}\pi^2 - \dfrac{4}{\pi}\cos x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{4}{27\pi}\cos 3x + \dfrac{1}{8}\cos 4x - \cdots$

29. $f' = 2x$, $f'' = 2$, $j_1 = 0$, $j_1' = -4\pi$, $j_1'' = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n\pi}\left(-\dfrac{1}{n}\right)(-4\pi)\cos n\pi$ etc.

Problemas Propostos 11.2

1. $\dfrac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\dfrac{3\pi x}{2} + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$

3. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x - \dfrac{1}{4}\cos 2\pi x + \dfrac{1}{9}\cos 3\pi x - + \cdots\right)$

5. Retificador, $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}\cos 2\pi x + \dfrac{1}{3\cdot 5}\cos 4\pi x + \dfrac{1}{5\cdot 7}\cos 6\pi x + \cdots\right)$

7. Retificador, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x + \dfrac{1}{9}\cos 3\pi x + \dfrac{1}{25}\cos 5\pi x + \cdots\right)$

9. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x - \dfrac{1}{4}\cos 2\pi x + \dfrac{1}{9}\cos 3\pi x - \dfrac{1}{16}\cos 4\pi x + - \cdots\right)$

11. $\dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos\dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{1}{2}\cos \pi x + \dfrac{1}{9}\cos\dfrac{3\pi x}{2} + \dfrac{1}{25}\cos\dfrac{5\pi x}{2} + \dfrac{1}{18}\cos 3\pi x + \cdots\right)$

13. $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 4x$

15. Faça uma translação de $\frac{1}{2}$. **17.** Faça $x = 0$.

Problemas Propostos 11.3

1. Par, ímpar, nenhum dos dois, par, nenhum dos dois, ímpar

3. Ímpar

5. Nenhum dos dois

7. Ímpar

9. Ímpar

11. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

13. $\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5x - + \cdots\right)$

15. $1 - \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$

17. (a) 1, (b) $\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$

19. (a) $1 + \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$

(b) $\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi x + \cdots\right)$

21. (a) $\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2} - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi x}{2} + - \cdots\right)$

(b) $\frac{6}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}\pi x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2} - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3\pi x + \cdots\right)$

23. (a) $\frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right)$

(b) $\frac{2L}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L} - + \cdots\right)$

25. (a) $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

(b) $2\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \cdots\right)$

Problemas Propostos 11.4

3. Use (5).

7. $-\frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{(2n+1)ix}$

9. $i\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

11. $\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}$

13. $\pi + i\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}e^{inx}$

Problemas Propostos 11.5

3. $(0{,}05n)^2$ em D_n muda para $(0{,}02n)^2$, que fornece $C_5 = 0{,}5100$, deixando os outros coeficientes quase inalterados.

5. $y = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t + A(\omega)\cos t$, $A(\omega) = 1/(\omega^2 - 1) < 0$ se $\omega^2 < 1$ (deslocamento de fase!) e > 0 se $\omega^2 > 1$

7. $y = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t + \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{\omega^2 - n^2}\cos nt$

9. $y = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t + \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\omega^2 - 1}\cos t + \frac{1/9}{\omega^2 - 9}\cos 3t + \cdots\right)$

11. $y = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{2\omega^2} - \frac{1}{1\cdot 3(\omega^2 - 4)}\cos 2t - \frac{1}{3\cdot 5(\omega^2 - 16)}\cos 4t - \cdots$

13. A situação é a mesma da Fig. 53 na Seção 2.8.

15. $y = -\frac{3c}{64 + 9c^2}\cos 3t - \frac{8}{64 + 9c^2}\operatorname{sen} 3t$

17. $y = \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{ncb_n}{D_n} \cos nt + \frac{(1 - n^2)b_n}{D_n} \operatorname{sen} nt \right)$, $D_n = (1 - n^2)^2 + n^2c^2$

19. $I(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt)$, $A_n = (-1)^{n+1} \frac{240(10 - n^2)}{n^2 D_n}$,

$B_n = (-1)^{n+1} \frac{2400}{nD_n}$, $D_n = (10 - n^2)^2 + 100n^2$

Problemas Propostos 11.6

1. $F = 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{N} \operatorname{sen} Nx \right)$, $E^* = 8{,}1;\ 5{,}0;\ 3{,}6;\ 2{,}8;\ 2{,}3$

3. $F = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \cdots \right)$, $E^* = 0{,}0748;\ 0{,}0748;\ 0{,}0119;\ 0{,}0119;\ 0{,}0037$

5. $F = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2x + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4x + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6x + \cdots \right)$, $E^* = 0{,}5951;\ 0{,}0292;\ 0{,}0292;\ 0{,}0066;\ 0{,}0066$

7. $F = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + \cdots \right)$, $E^* = 1{,}1902;\ 1{,}1902;\ 0{,}6243;\ 0{,}6243;\ 0{,}4206$
(0,1272 quando $N = 20$)

9. $\frac{8}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{27} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{125} \operatorname{sen} 5x + \cdots \right)$, $E^* = 0{,}0295;\ 0{,}0295;\ 0{,}0015;\ 0{,}0015;\ 0{,}00023$

Problemas Propostos 11.7

1. $f(x) = \pi e^{-x}$ $(x > 0)$ fornece $A = \int_0^{\infty} e^{-v} \cos wv \, dv = \frac{1}{1 + w^2}$, $B = \frac{w}{1 + w^2}$ (veja o Exemplo 3), etc.

3. $f(x) = \frac{1}{2}\pi e^{-x}$ fornece $A = 1/(1 + w^2)$.

5. Use $f = (\pi/2) \cos v$ e (11) no Apêndice 3.1 para obter $A = (\cos(\pi w/2))/(1 - w^2)$.

7. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} aw \cos xw}{w} \, dw$

9. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos w + w \operatorname{sen} w - 1}{w^2} \cos xw \, dw$

11. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi w + 1}{1 - w^2} \cos xw \, dw$

15. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi w}{1 - w^2} \operatorname{sen} xw \, dw$

17. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\pi w - \operatorname{sen} \pi w}{w^2} \operatorname{sen} xw \, dw$

19. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{wa - \operatorname{sen} wa}{w^2} \operatorname{sen} xw \, dw$

Problemas Propostos 11.8

1. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\operatorname{sen} 2w - 2 \operatorname{sen} w}{w} \right)$

5. $\sqrt{\pi/2}\, e^{-x}$ $(x > 0)$

7. $\sqrt{\pi/2}$ cos w se $0 < w < \pi/2$ e 0 se $w > \pi/2$

9. Sim, não

11. $\sqrt{(2/\pi)}\, w/(w^2 + \pi^2)$

13. $\mathcal{F}_s(xe^{-x^2/2}) = \mathcal{F}_s(-(e^{-x^2/2})') = w\mathcal{F}_c(e^{-x^2/2}) = we^{-w^2/2}$

17. $\mathcal{F}_c(f') = \mathcal{F}_c(-af) = -a\mathcal{F}_c(f) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^2}{a^2 + w^2} = w\mathcal{F}_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 1$, $\mathcal{F}_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{a^2 + w^2}$

19. Em (5) para $f(ax)$ faça $ax = v$.

Problemas Propostos 11.9

3. $ik(e^{-ibw} - 1)/(\sqrt{2\pi}\, w)$

5. $\sqrt{(2/\pi)}\, k$ (sen w)$/w$

7. $[(1 + iw)e^{-iw} - 1]/(\sqrt{2\pi}w^2)$

9. $\sqrt{(2/\pi)}\, i(\cos w - 1)/w$

11. $\frac{1}{2}e^{-w^2/2}$

13. $(e^{ibw} - e^{-ibw})/(iw\sqrt{2\pi}) = \sqrt{(2/\pi)}$ (sen bw)$/w$

Questões e Problemas de Revisão do Capítulo 11

11. $\frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen}\pi x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\pi x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}5\pi x + \cdots\right)$

13. $4\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5x}{2} - + \cdots\right)$

15. $\frac{8}{\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{9}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2} - + \cdots\right)$

17. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 16\pi x + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 32\pi x + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 48\pi x + \cdots\right)$

19. $\frac{\pi^2}{12} - \cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{9}\cos 6x + \frac{1}{16}\cos 8x - + \cdots$

21. $\pi/4$ pelo Problema 11

23. $\pi^2/8$ pelo Problema 15

25. $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

27. $\pi - \frac{8}{\pi}\left(\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3x}{2} + \frac{1}{25}\cos\frac{5x}{2} + \cdots\right)$

29. 8,105; 4,963; 3,567; 2,781; 2,279; 1,929; 1,673; 1,477

31. $y = C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t + \frac{\pi^2}{3\omega^2} - 4\left(\frac{\cos t}{\omega^2 - 1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 2t}{\omega^2 - 4} + \frac{1}{9}\cdot\frac{\cos 3t}{\omega^2 - 9} - \frac{1}{16}\cdot\frac{\cos 4t}{\omega^2 - 16} + - \cdots\right)$

33. $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\cos w + w\operatorname{sen} w - 1)\cos wx + (\operatorname{sen} w - w\cos w)\operatorname{sen} wx}{w^2}\,dw$

35. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w - \operatorname{sen} w\cos w}{w^2}\operatorname{sen} wx\,dw$

37. $\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2w - 2w\cos 2w}{w^3}\cos wx\,dw$

39. $\sqrt{\frac{8}{\pi}}\cdot\frac{1}{w^2 + 4}$

Problemas Propostos 12.1

1. $u = c_1(x)\cos 4y + c_2(x)\operatorname{sen}4y$

3. $u = c_1(x) + c_2(x)y$

5. $u = c(x)e^{-y} + e^{xy}/(x + 1)$

7. $u = c(x)\exp(\frac{1}{2}y^2\cosh x)$

9. $u = c_1(x)y + c_2(x)y^{-2}$

11. $u = c(x)e^y + h(y)$

15. $c = 1/4$

17. Qualquer c

19. $\pi/4$

21. Qualquer c e ω

27. $u = 110 - (110/\ln 100)\ln(x^2 + y^2)$

29. $u = c_1x + c_2(y)$

Problemas Propostos 12.3

1. $k\cos 2\pi t\operatorname{sen}2\pi x$

3. $\frac{8k}{\pi^3}\left(\cos\pi t\operatorname{sen}\pi x + \frac{1}{27}\cos 3\pi t\operatorname{sen}3\pi x + \frac{1}{125}\cos 5\pi t\operatorname{sen}5\pi x + \cdots\right)$

5. $\frac{4}{5\pi^2}\left(\cos\pi t\operatorname{sen}\pi x - \frac{1}{9}\cos 3\pi t\operatorname{sen}3\pi x + \frac{1}{25}\cos 5\pi t\operatorname{sen}5\pi x - + \cdots\right)$

7. $\frac{2}{\pi^2}\left((\sqrt{2} - 1)\cos\pi t\operatorname{sen}\pi x + \frac{1}{2}\cos 2\pi t\operatorname{sen}2\pi x + \frac{1}{9}(\sqrt{2} + 1)\cos 3\pi t\operatorname{sen}3\pi x - \cdots\right)$

9. $\frac{2}{\pi^2}\left((2 - \sqrt{2})\cos\pi t\operatorname{sen}\pi x - \frac{1}{9}(2 + \sqrt{2})\cos 3\pi t\operatorname{sen}3\pi x + \frac{1}{25}(2 + \sqrt{2})\cos 5\pi t\operatorname{sen}5\pi x + \cdots\right)$

17. $u = \frac{8L^2}{\pi^3}\left(\cos\left[c\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t\right]\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^3}\cos\left[c\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t\right]\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L} + \cdots\right)$

19. (a) $u(0, t) = 0$, (b) $u(L, t) = 0$, (c) $u_x(0, t) = 0$, (d) $u_x(L, t) = 0$. $C = -A$, $D = -B$ de (a), (b). Insira este resultado. O determinante dos coeficientes resultante de (c), (d) deve ser nulo para haver uma solução não-trivial. Isto fornece (22).

Problemas Propostos 12.4

3. $c^2 = 300/[0{,}9/(2 \cdot 9{,}80)] = 80{,}83^2$ [m²/s²]

11. Hiperbólica, $u = f_1(x) + f_2(x + y)$

13. Elíptica, $u = f_1(y + 3ix) + f_2(y - 3ix)$

15. Parabólica, $u = xf_1(x - y) + f_2(x - y)$

17. Parabólica, $u = xf_1(2x + y) + f_2(2x + y)$

19. Hiperbólica, $u = (1/y)f_1(xy) + f_2(y)$

Problemas Propostos 12.5

5. $u = \operatorname{sen} 0{,}4\pi x\, e^{-1{,}752 \cdot 16\pi^2 t/100}$

7. $u = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen} 0{,}1\pi x\, e^{-0{,}01752\pi^2 t} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0{,}2\pi x\, e^{-0{,}01752(2\pi)^2 t} - \cdots\right)$

9. $u = \dfrac{20\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\operatorname{sen} 0{,}1\pi x\, e^{-0{,}01752\pi^2 t} + \dfrac{1}{9}\operatorname{sen} 0{,}3\pi x\, e^{-0{,}01752(3\pi)^2 t} - - \cdots\right)$

11. $u = u_{\mathrm{I}} + u_{\mathrm{II}}$, onde $u_{\mathrm{II}} = u - u_{\mathrm{I}}$ satisfaz às condições de contorno dadas no texto, de modo que

$$u_{\mathrm{II}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-(cn\pi/L)^2 t},\ B_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - u_{\mathrm{I}}(x)] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

13. $F = A\cos px + B\operatorname{sen} px$, $F'(0) = Bp = 0$, $B = 0$, $F'(L) = -Ap\operatorname{sen} pL = 0$, $p = n\pi/L$, etc.

15. $u = 1$

17. $u = \dfrac{2\pi^2}{3} + 4\left(\cos x\, e^{-t} - \dfrac{1}{4}\cos 2x\, e^{-4t} + \dfrac{1}{9}\cos 3x\, e^{-9t} - + \cdots\right)$

19. $u = \dfrac{\pi^2}{12} + \cos 2x\, e^{-4t} + \dfrac{1}{4}\cos 4x\, e^{-16t} + \dfrac{1}{9}\cos 6x\, e^{-36t} + \cdots$

23. $-\dfrac{K\pi}{L}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nB_n e^{-\lambda_n^2 t}$ **25.** $w = e^{-\beta t}$

27. $v_t - c^2 v_{xx} = 0$, $w'' = -Ne^{-\alpha x}/c^2$, $w = \dfrac{N}{c^2\alpha^2}\left[-e^{-\alpha x} - \dfrac{1}{L}(1 - e^{-\alpha L})x + 1\right]$, de modo que $w(0) = w(L) = 0$.

29. $u = (\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi x \operatorname{senh} \frac{1}{2}\pi y)/\operatorname{senh} \pi$

31. $u = \dfrac{80}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\operatorname{senh}(2n-1)\pi}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{24}\operatorname{senh}\frac{(2n-1)\pi y}{24}$

33. $u = A_0 x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{senh}(n\pi x/24)}{\operatorname{senh} n\pi}\cos\frac{n\pi y}{24}$, $A_0 = \dfrac{1}{24^2}\displaystyle\int_0^{24} f(y)\, dy$, $A_n = \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{24} f(y)\cos\frac{n\pi y}{24}\, dy$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi(b-y)}{a}$, $A_n = \dfrac{2}{a\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\displaystyle\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\, dx$

Problemas Propostos 12.6

1. $A = \dfrac{2\operatorname{sen} ap}{\pi p}$, $B = 0$, $u = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} ap}{p}\cos px\, e^{-c^2p^2t}\, dp$

3. $A = e^{-p}$, $B = 0$, $u = \displaystyle\int_0^{\infty}\cos px\, e^{-p-c^2p^2t}\, dp$

5. Faça $\pi v = s$. $A = 1$ se $0 < p/\pi < 1$, $B = 0$, $u = \displaystyle\int_0^{\pi}\cos px\, e^{-c^2p^2t}\, dp$

7. $A = 2[\cos p + p\operatorname{sen} p - 1)/(\pi p^2)]$, $B = 0$, $u = \displaystyle\int_0^{\infty} A\cos px\, e^{-c^2p^2t}\, dp$

Problemas Propostos 12.8

1. (a), (b) É multiplicada por $\sqrt{2}$. (c) Meio

3. $B_{mn} = 16/(mn\pi^2)$ se m, n ímpar, 0 em outros casos

5. $B_{mn} = (-1)^{n+1}8/(mn\pi^2)$ se m ímpar, 0 se m par

7. $B_{mn} = (-1)^{m+n}4/(mn\pi^2)$

11. $k \cos \sqrt{29}\, t \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 5y$

13. $\dfrac{6{,}4}{\pi^2} \sum_{\substack{m=1 \\ m,\, n \text{ ímpares}}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^3 n^3} \cos\left(t\sqrt{m^2+n^2}\right) \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny$

17. $c\pi\sqrt{260}$ (autofunções correspondentes $F_{4,16}$ e $F_{16,14}$) etc.

19. $B_{mn} = 0$ (m ou n par), $B_{mn} = 16k/(mn\pi^2)$ (m, n ímpar)

21. $B_{mn} = (-1)^{m+n} 144\, a^3 b^3/(m^3 n^3 \pi^6)$

23. $\cos\left(\pi t \sqrt{\dfrac{9}{a^2} + \dfrac{16}{b^2}}\right) \operatorname{sen} \dfrac{3\pi x}{a} \operatorname{sen} \dfrac{4\pi y}{b}$

Problemas Propostos 12.9

7. $30r \cos\theta + 10r^3 \cos 3\theta$

9. $55 + \dfrac{220}{\pi}\left(r\cos\theta - \dfrac{1}{3} r^3 \cos 3\theta + \dfrac{1}{5} r^5 \cos 5\theta - + \cdots\right)$

11. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(r\cos\theta + \dfrac{1}{9} r^3 \cos 3\theta + \dfrac{1}{25} r^5 \cos 5\theta + \cdots\right)$

15. Resolva o problema no disco $r < a$ sujeito a u_0 (determinado) no semicírculo superior e a $-u_0$ no semicírculo inferior.

$$u = \frac{4u_0}{\pi}\left(\frac{r}{a}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3a^3} r^3 \operatorname{sen} 3\theta + \frac{1}{5a^5} r^5 \operatorname{sen} 5\theta + \cdots\right)$$

17. Aumentar por um fator de $\sqrt{2}$

19. $T = 6{,}826\rho R^2 f_1^{\,2}$

21. Não

23. A derivação traz um fator $1/\lambda_m = R/(c\alpha_m)$.

Problemas Propostos 12.10

11. $v = F(r)G(t)$, $F'' + k^2F = 0$, $\dot{G} + c^2k^2G = 0$, $F_n = \operatorname{sen}(n\pi r/R)$, $G_n = B_n \exp(-c^2n^2\pi^2 t/R^2)$,

$$B_n = \frac{2}{R}\int_0^R rf(r) \operatorname{sen}\frac{n\pi r}{R}\, dr$$

13. $u = 100$

15. $u = \frac{8}{5} r^3 P_3(\cos\phi) - \frac{3}{5} r P_1(\cos\phi)$

17. $64r^4 P_4(\cos\phi)$

21. Análogo ao Exemplo 1 do texto com 55 substituído por 50

23. $v = r(\cos\theta)/r^2 = x/(x^2 + y^2)$, $v = xy/(x^2 + y^2)^2$

Problemas Propostos 12.11

5. $W = \dfrac{c(s)}{x^s} + \dfrac{x}{s^2(s+1)}$, $W(0, s) = 0$, $c(s) = 0$, $w(x, t) = x(t - 1 + e^{-t})$

7. $w = f(x)g(t)$, $xf'g + f\dot{g} = xt$, considere $f(x) = x$ para obter $g = ce^{-t} + t - 1$ e $c = 1$ de $w(x, 0) = x(c - 1) = 0$.

9. Faça $x^2/(4c^2\tau) = z^2$. Use z como uma nova variável de integração. Use $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Questões e Problemas de Revisão do Capítulo 12

19. $u = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-2x}$

21. $u = g(x)(1 - e^{-y}) + f(x)$

23. $u = \cos t \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos 2t \operatorname{sen} 2x$

25. $u = \frac{3}{4}\cos t \operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\cos 3t \operatorname{sen} 3x$

27. $u = \operatorname{sen}(0{,}02\pi x)\, e^{-0{,}004572t}$

29. $u = \dfrac{200}{\pi^2}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{50} e^{-0{,}004572t} - \dfrac{1}{9}\operatorname{sen}\dfrac{3\pi x}{50} e^{-0{,}04115t} + \cdots\right)$

31. $u = 100 \cos 4x\, e^{-16t}$

33. $u = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{16}{\pi}\left(\dfrac{1}{4}\cos 2x\, e^{-4t} + \dfrac{1}{36}\cos 6x\, e^{-36t} + \dfrac{1}{100}\cos 10x\, e^{-100t} + \cdots\right)$

37. $u = f_1(y) + f_2(x + y)$ **39.** $u = f_1(y - 2ix) + f_2(y + 2ix)$
41. $u = xf_1(y - x) + f_2(y - x)$
49. $u = (u_1 - u_0)(\ln r)/\ln (r_1/r_0) + (u_0 \ln r_1 - u_1 \ln r_0)/\ln (r_1/r_0)$

Problemas Propostos 13.1

5. $x - iy = -(x + iy)$, $x = 0$ **7.** 484
9. $-5/169$ **11.** $-7/13 - (22/13)i$ **13.** $-273 + 136i$
15. $-7/17 - (11/17)i$ **17.** $x/(x^2 + y^2)$ **19.** $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$

Problemas Propostos 13.2

1. $3\sqrt{2}(\cos(-\frac{1}{4}\pi) + i \operatorname{sen}(-\frac{1}{4}\pi))$
3. $5(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 5 \cos \pi$ **5.** $\cos \frac{1}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi$
7. $\frac{1}{3}\sqrt{61}(\cos \arctan \frac{6}{5} + i \operatorname{sen} \arctan \frac{6}{5})$ **9.** $-3\pi/4$
11. $\arctan(\pm 3/4)$ **13.** $\pm\pi/4$ **15.** $3\pi/4$
17. $2{,}94020 + 0{,}59601i$ **19.** $0{,}54030 - 0{,}84147i$
21. $\cos(-\frac{1}{4}\pi) + i \operatorname{sen}(-\frac{1}{4}\pi)$, $\cos \frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi$
23. $\pm(1 \pm i)/\sqrt{2}$ **25.** -1, $\cos \frac{1}{5}\pi \pm i \operatorname{sen} \frac{1}{5}\pi$, $\cos \frac{3}{5}\pi \pm i \operatorname{sen} \frac{3}{5}\pi$
27. $4 + 3i$, $4 - 8i$ **29.** $\frac{5}{2} - i$, $2 + \frac{1}{4}i$
35. $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$. Multiplique e use $\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 \leqq |z_1\bar{z}_2|$ (Problema 32): $z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 + |z_2|^2 \leqq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$. Tome a raiz quadrada para obter (6).

Problemas Propostos 13.3

1. Círculo de raio $\frac{4}{3}$, centro $3 + 2i$
3. Conjunto obtido de um disco aberto de raio 1 omitindo-se seu centro $z = 1$
5. Hipérbole $xy = 1$ **7.** Eixo y
9. A região acima $y = x$
13. $f = 1 - 1/(z + 1) = 1 - (x + 1 - iy)/[(x + 1)^2 + y^2]$; $0{,}9 - 0{,}1i$
15. $(x^2 - y^2 - 2ixy)/(x^2 + y^2)^2$, $-i/2$ **17.** Sim, visto que $r^2(\operatorname{sen} 2\theta)/r \to 0$
19. Sim **21.** $6z^2(z^3 + i)$
23. $2i(1 - z)^{-3}$

Problemas Propostos 13.4

1. Sim **3.** Não **5.** Sim
7. Não **9.** Sim para $z \neq 0$
11. $r_x = x/r = \cos \theta$, $r_y = \operatorname{sen} \theta$, $\theta_x = -(\operatorname{sen} \theta)/r$, $\theta_y = (\cos \theta)/r$,
(a) $0 = u_x - v_y = u_r \cos \theta + u_\theta(-\operatorname{sen} \theta)/r - v_r \operatorname{sen} \theta - v_\theta(\cos \theta)/r$.
(b) $0 = u_y + v_x = u_r \operatorname{sen} \theta + u_\theta(\cos \theta)/r + v_r \cos \theta + v_\theta(-\operatorname{sen} \theta)/r$.
Multiplique (a) por $\cos \theta$, (b) por $\operatorname{sen} \theta$, e adicione Etc.
13. $z^2/2$ **15.** $\ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ **17.** z^3
19. Não **21.** Não **23.** $c = 1$, $\cos x \operatorname{senh} y$ **27.** Use (4), (5), e (1).

Problemas Propostos 13.5

3. $-1{,}13120 + 2{,}47173i$, $e = 2{,}71828$ **5.** $-i$, 1
7. $e^{0,8}(\cos 5 - i \operatorname{sen} 5)$, $2{,}22554$ **9.** $e^{-2x} \cos 2y$, $-e^{-2x} \operatorname{sen} 2y$
11. $\exp(x^2 - y^2) \cos 2xy$, $\exp(x^2 - y^2) \operatorname{sen} 2xy$
13. $e^{i\pi/4}$, $e^{5\pi i/4}$
15. $\sqrt[n]{r} \exp[i(\theta + 2k\pi)/n]$, $k = 0, \cdots, n - 1$
17. $9e^{\pi i}$ **19.** $z = \ln 2 + \pi i + 2n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \cdots)$
21. $z = \ln 5 - \arctan \frac{3}{4}i \pm 2n\pi i$ $(n = 0, 1, \cdots)$

Problemas Propostos 13.6

3. Use (11), então (5) para e^{iy}, e simplifique. **5.** Use (11) e simplifique.
7. $\cos 1 \cosh 1 - i \operatorname{sen} 1 \operatorname{senh} 1 = 0{,}83373 - 0{,}98890i$

9. 74,203; 74,210 **11.** $-3{,}7245 - 0{,}51182i$
13. -1 **15.** $\cosh 4 = 27{,}308$
17. $z = \pm(2n+1)\pi i/2$ **19.** $z = \frac{1}{2}(2n+1)\pi - (-1)^n 1{,}4436i$ **21.** $z = \pm n\pi i$
25. Insira as definições à esquerda, multiplique, simplifique.

Problemas Propostos 13.7

1. $\ln 10 + \pi i$ **3.** $\frac{1}{2}\ln 8 - \frac{1}{4}\pi i$
5. $\ln 5 + (\arctan \frac{4}{3} - \pi)i = 1.609 - 2.214i$
7. $0{,}9273i$ **9.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\pi i$
11. $\pm(2n+1)\pi i, \quad n = 0, 1, \cdots$ **13.** $\ln 6 \pm (2n+1)\pi i, \quad n = 0, 1, \cdots$
15. $(\pi - 1 \pm 2n\pi)i, \quad n = 0, 1, \cdots$
17. $\ln(i^2) = (\pm 2n+1)\pi i$, $2 \ln i = \pm(4n+1)\pi i, \quad n = 0, 1, \cdots$
19. $e^{0,3}(\cos 0{,}7 + i \operatorname{sen} 0{,}7) = 1{,}032 + 0{,}870i$
21. $e^2(1+i)/\sqrt{2}$ **23.** $64(\cos(\ln 4) + i \operatorname{sen}(\ln 4))$
25. $2{,}8079 + 1{,}3179i$ **27.** $(1+i)/\sqrt{2}$

Questões e Problemas de Revisão do Capítulo 13

17. $-32 - 24i$ **19.** $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **21.** $5 - 3i$
23. $6\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$ **25.** $12e^{-\pi i/2}$ **27.** $\pm(2 + 2i)$
29. $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$ **31.** $f(z) = 1/z$ **33.** $f(z) = (1+i)z^2$
35. $f(z) = e^{z^2}$ **37.** $(-x^2 + y^2)/2$ **39.** Não
41. 0 **43.** $0{,}6435i$ **45.** $-1{,}5431$

Problemas Propostos 14.1

1. Segmento retilíneo de $1 + 3i$ a $4 + 12i$
3. Círculo de raio 3, centro $4 + i$ **5.** Semicírculo, raio 1, centro 0
7. Elipse, semi-eixos 6 e 5
9. Parábola $y = \frac{1}{2}x^3$ de $-1 - \frac{1}{2}i$ a $2 + 4i$
11. e^{-it} $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$
13. $t + i/t$ $(1 \leqq t \leqq 4)$ **15.** $t + (4 - 4t^2)i$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$
17. $-a - ib + re^{-it}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ **19.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
21. 0 **23.** $\pi i + \frac{1}{2}i \operatorname{senh} 2\pi$
25. $i/2$ **27.** $-1 + i \tanh \frac{1}{4}\pi = -1 + 0{,}6558i$
29. $2 \operatorname{senh} \frac{1}{2}$

Problemas Propostos 14.2

1. πi, não **3.** 0, sim **5.** 0, sim
7. 0, sim **9.** 0, não **11.** 0, sim
15. Sim, pelo princípio da deformação **19.** πi pela deformação do caminho
21. πi **23.** $2\pi i$ **25.** 0
27. (a) 0, (b) π **29.** 0

Problemas Propostos 14.3

1. -4π **3.** 4π **5.** $8\pi i$
7. 0 **9.** $-\pi i$ **11.** πi
13. π **15.** $2\pi i \operatorname{Ln} 4 = 8{,}710i$
17. $\pi i \cosh^2(1+i) = \pi(-0{,}2828 + 1{,}6489i)$

Problemas Propostos 14.4

1. $27\pi i/4$ **3.** $-2\pi i e^{\pi/2}$ **5.** $\pi i a^3/3$
7. $2\pi i$ se $|a| < 2$, 0 se $|a| > 2$ **9.** $\pi i(\cos \frac{1}{2} - \operatorname{sen} \frac{1}{2})$
11. $2\pi^2 i$ **13.** $\pi i e^{a/2}/24$ se $|a - 2 - i| < 3$, 0 se $|a - 2 - i| > 3$

Questões e Problemas de Revisão do Capítulo 14

17. $-6\pi i$ **19.** 0 **21.** $-\pi i$
23. $\frac{1}{4}i$ sen 8 **25.** 0 **27.** π **29.** 0

Problemas Propostos 15.1

1. Limitada, divergente, ± 1 **3.** Limitada, convergente, 0
5. Não-limitada
7. Limitada, divergente, $\pm 1/\sqrt{2} \pm i$, 0, 1, -2
9. Convergente, 0
13. $|z_n - l| < \frac{1}{2}\epsilon$, $|z_n^* - l^*| < \frac{1}{2}\epsilon$ $(n > N(\epsilon))$, logo, $|z_n + z_n^* - (l + l^*)| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon$
17. Convergente **19.** Divergente
21. Condicionalmente convergente **23.** Divergente pelo Teorema 3
27. $n = |100 + 75i| = 125$ (por quê?); $|100 + 75i|^{125}/125! = 125^{125}/[\sqrt{250\pi}\,(125/e)^{125}] = e^{125}/\sqrt{250\pi}$ $= 6{,}91 \cdot 10^{52}$

Problemas Propostos 15.2

1. $\Sigma\, a_n z^{2n} = \Sigma\, a_n (z^2)^n$, $|z^2| < R = \lim |a_n/a_{n+1}|$, logo, $|z| < \sqrt{R}$.
3. $-i$, 1 **5.** -1, e por (6) e $(1 + 1/n)^n \to e$.
7. 0, $|b/a|$ **9.** 0, 1 **11.** 0, 1
13. $3 - 2i$, 1 **15.** i, $1/\sqrt[4]{2}$ **17.** 0, $\sqrt{2}$

Problemas Propostos 15.3

1. 3 **3.** $\sqrt{2}$ **5.** $\sqrt{5/3}$
7. $1/\sqrt{7}$ **9.** 1

Problemas Propostos 15.4

1. $1 - 2z + 2z^2 - \frac{4}{3}z^3 + \frac{2}{3}z^4 - + \cdots$, $R = \infty$
3. $e^{-2i}(1 + (z + 2i) + \frac{1}{2}(z + 2i)^2 + \frac{1}{6}(z + 2i)^3 + \frac{1}{24}(z + 2i)^4 + \cdots$, $R = \infty$
5. $1 - \frac{1}{2}(z - \frac{1}{2}\pi)^2 + \frac{1}{24}(z - \frac{1}{2}\pi)^4 - \frac{1}{720}(z - \frac{1}{2}\pi)^6 + - \cdots$, $R = \infty$
7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i(z - i) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)(z - i)^2 - \frac{1}{4}(z - i)^3 + - \cdots$, $R = \sqrt{2}$
9. $1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{48}z^6 + \frac{1}{384}z^8 - + \cdots$, $R = \infty$
11. $4(z - 1) + 10(z - 1)^2 + 16(z - 1)^3 + 14(z - 1)^4 + 6(z - 1)^5 + (z - 1)^6$
13. $(2/\sqrt{\pi})(z - z^3/3 + z^5(2!5) - z^7/(3!7) + \cdots)$, $R = \infty$
15. $z^3/(1!3) - z^7/(3!7) + z^{11}/(5!11) - + \cdots$, $R = \infty$
19. $z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$, $R = \frac{1}{2}\pi$

Problemas Propostos 15.5

1. Use o Teorema 1. **3.** $R = 1/\sqrt{\pi} > 0{,}56$
5. $|z^n| \leqq 1$ e $\Sigma\, 1/n^2$ convergem. **7.** $|\tanh^n |z|| \leqq 1$, $1/(n^2 + 1) < 1/n^2$
9. $|z + 1 - 2i| \leqq r < R = 4$ **11.** $|z| \leqq 2 - \delta$ $(\delta > 0)$
13. Em nenhum lugar **15.** $|z| \leqq \sqrt{5} - \delta$ $(\delta > 0)$

Questões e Problemas de Revisão do Capítulo 15

11. ∞, e^{3z} **13.** 1, $\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}[(1 + z)/(1 - z)]$
15. ∞ **17.** $1/\sqrt{\pi}$, $[1 - \pi(z - 2i)^2]^{-1}$
19. 1/3
21. $-1 - (z - \pi i) - (z - \pi i)^2/2! - \cdots$, $R = \infty$
23. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z + 1) + \frac{1}{8}(z + 1)^2 + \frac{1}{16}(z + 1)^3 + \cdots$, $R = 2$
25. $1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \cdots$, $R = 1$. Derive a série geométrica.
27. $i + (z + i) - i(z + i)^2 - (z + i)^3 + \cdots$, $R = 1$
29. $-(z - \frac{1}{2}\pi) + \dfrac{1}{3!}(z - \frac{1}{2}\pi)^3 - \dfrac{1}{5!}(z - \frac{1}{2}\pi)^5 + - \cdots$, $R = \infty$

Problemas Propostos 16.1

1. $\dfrac{1}{z^4}+\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots,\ R=1$

3. $\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2z}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}z-\dfrac{1}{120}z^2+-\cdots,\ R=\infty$

5. $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^5}+\dfrac{1}{2z^7}+\dfrac{1}{6z^9}+\cdots,\ R=\infty$

7. $\dfrac{e^{z-1}e}{z-1}=e\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{n-1}}{n!}=e\left[\dfrac{1}{z-1}+1+\dfrac{z-1}{2!}+\cdots\right],\ R=\infty$

9. $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1}=-\dfrac{i/2}{z-i}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{i}{8}(z-i)-\dfrac{1}{16}(z-i)^2-\cdots,\ R=2$

11. $-\sum_{n=0}^{\infty}(z+i)^{n-1}=-\dfrac{1}{z+i}-1-(z+i)-\cdots,\ R=1$

13. $-\dfrac{3}{z-1}+2+(z-1)$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}z^{3n},\ |z|<1,\quad -\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{3n+3}},\quad |z|>1$

17. $\sum_{n=0}^{\infty}z^{4n+2},\ |z|<1,\quad -\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{4n+2}},\quad |z|>1$

19. $\dfrac{i}{(z-i)^2}+\dfrac{1}{z-i}+i+(z-i)$

21. $(1-4z)\sum_{n=0}^{\infty}z^{4n},\ |z|<1,\ \left(\dfrac{4}{z^3}-\dfrac{1}{z^4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{4n}},\ |z|>1$

23. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(z+\frac{1}{2}\pi)^{2n-1}}{(2n)!},\ |z+\frac{1}{2}\pi|>0$

Problemas Propostos 16.2

1. $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\cdots$ (pólos de segunda ordem), ∞ (singularidade essencial)

3. 0, $\pm\sqrt{\pi}$, $\pm\sqrt{2\pi}$, $\cdots$ (pólos simples), ∞ (singularidade essencial)

5. ∞ (singularidade essencial)

7. ±1, $\pm i$ (pólos de quarta ordem), ∞ (singularidade essencial)

9. $\pm i$ (singularidades essenciais)

11. $-16i$ (quarta ordem)

13. ±1, ±2, $\cdots$ (terceira ordem)

15. $\pm i/\sqrt{3}$ (simples)

17. $\pm2i$ (simples), 0, $\pm2\pi i$, $\pm4\pi i$, $\cdots$ (segunda ordem)

19. 0, $\pm2\pi$, $\pm4\pi$, $\cdots$ (quarta ordem)

21. $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$, $g(z_0)\neq0$, logo, $f^2(z)=(z-z_0)^{2n}g^2(z)$.

Problemas Propostos 16.3

1. i, $4i$

3. $-\frac{1}{4}i$ (em $z=2i$), $\frac{1}{4}i$ (em $-2i$)

5. 1/5! (em $z=0$)

7. 1 (em $\pm n\pi$)

9. $-\frac{1}{4}$ (em $z=1$), $\frac{1}{4}$ (em $z=-1$)

11. -1 (em $z=\pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, $\cdots$)

15. $e^{1/z}=1+1/z+\cdots$, *Resp.* $2\pi i$

17. Pólos simples em $\pm\frac{1}{2}$. *Resp.* $-4i$

19. $-4\pi i$ senh $\frac{1}{2}\pi$

21. $-4i$ senh $\frac{1}{2}$

23. 0

25. $\frac{1}{2}$ (em $z=\frac{1}{2}$), 2 (em $z=\frac{1}{3}$). *Resp.* $5\pi i$

Problemas Propostos 16.4

1. $2\pi/\sqrt{13}$

3. $2\pi/35$

5. $2\pi/3$

7. 0

9. π

11. $2\pi/3$

13. $\pi/16$

15. 0

17. $\pi/2$

19. 0 **21.** 0 **23.** π
25. 0 **27.** $-\pi/2$

Questões e Problemas de Revisão do Capítulo 16

17. $2\pi i/3$ **19.** 5π **21.** $\frac{1}{2}\pi \cos 10$
23. $\pi i/4$ **25.** 0 (n par), $(-1)^{(n-1)/2}\, 2\pi i/(n-1)!$ (n ímpar)
27. $6\pi i$ **29.** $2\pi/7$ **31.** $4\pi/\sqrt{3}$
33. 0 **35.** $\pi/2$

Problemas Propostos 17.1

3. Só o tamanho
5. $x = c$, $w = -y + ic$, $y = k$, $w = -k + ix$
7. $-3\pi/4 < \text{Arg } w < 3\pi/4$, $|w| < 1/8$ **9.** $|w| > 3$
11. $|w| \leqq 16$, $v \geqq 0$ **13.** Anel $3 < |w| < 5$
15. $\ln 2 \leqq u \leqq \ln 3$, $\pi/4 \leqq v \leqq \pi/2$ **17.** ± 1, $\pm i$
19. 0, ± 1, ± 2, $\cdots$ **21.** $-a/2$
23. a e 0, $\sqrt[3]{a}$ **25.** $M = e^x = 1$ quando $x = 0$, $J = e^{2x}$
27. $M = 1/|z| = 1$ sobre a circunferência unitária, $J = 1/|z|^2$

Problemas Propostos 17.2

5. $z = \dfrac{-iw}{-2w + 3}$ **7.** $z = \dfrac{5i}{4w - 2}$
9. $z = 0$ **11.** $z = \frac{1}{2} + i \pm \sqrt{\frac{1}{4} + i}$
13. $z = \pm i$ **15.** $w = 4/z$ etc.
17. $a - d = 0$, $b/c = 1$ por (5) **19.** $w = az/d$ ($a \neq 0$, $d \neq 0$)

Problemas Propostos 17.3

5. Aplique a inversa g de f em ambos os lados de $z_1 = f(z_1)$ para obter $g(z_1) = g(f(z_1)) = z_1$.
7. $w = (z + 2i)/(z - 2i)$ **9.** $w = z - 4$
11. $w = 1/z$ **13.** $w = (3iz + 1)/z$
15. $w = (z + 1)/(-3z + 1)$ **17.** $w = (2z - i)/(-iz - 2)$
19. $w = (z^4 - i)/(-iz^4 + 1)$

Problemas Propostos 17.4

1. Anel $1 \leqq |w| \leqq e^2$
3. $1/\sqrt{e} < |w| < \sqrt{e}$, $3\pi/4 < \arg w < 5\pi/4$
5. $1 < |w| < e$, $v > 0$
7. Plano w sem 0
9. $u^2/\cosh^2 1 + v^2/\text{senh}^2 1 \leqq 1$, $u \geqq 0$
11. Anel elíptico limitado por $u^2/\cosh^2 1 + v^2/\text{senh}^2 1 = 1$ e $u^2/\cosh^2 5 + v^2/\text{senh}^2 5 = 1$
13. $\pm(2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, \cdots$
15. $0 < \text{Im } t < \pi$ é a imagem de R sob $t = z^2$. *Resp.* $e^t = e^{z^2}$
17. 0, $\pm i$, $\pm 2i$, $\cdots$
19. $u^2/\cosh^2 1 + v^2/\text{senh}^2 1 \leqq 1$, $v < 0$
21. $v < 0$
23. $-1 \leqq u \leqq 1$, $v = 0$ ($c = 0$), $u^2/\cosh^2 c + v^2/\text{senh}^2 c = 1$ ($c \neq 0$)
25. $\ln 2 \leqq u \leqq \ln 3$, $\pi/4 \leqq v \leqq \pi/2$

Problemas Propostos 17.5

1. w move-se uma vez ao redor da circunferência unitária. **5.** $-5/3$, 2 folhas
7. $-i/2$, 3 folhas **9.** 0, 2 folhas

Questões e Problemas de Revisão do Capítulo 17

11. $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$, $\frac{1}{4}v^2 - 1$ **13.** $|w| = 20{,}25$, $|\arg w| < \pi/2$

15. O domínio entre $u = \frac{1}{4} - v^2$ e $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$
17. $|w + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ **19.** $u = 1$ **21.** $|\arg w| < \pi/4$
23. $0, (\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$ **25.** $\pi/8 \pm n\pi/2$, $n = 0, 1, \cdots$
27. $0, \pm i/\sqrt{2}$ **29.** $w = iz$ **31.** $w = 1/z$
33. $w = z/(z + 2)$ **35.** $\pm\sqrt{2}$ **37.** $2 \pm \sqrt{6}$
39. $1 + i \pm \sqrt{1 + 2i}$ **41.** $w = e^{3z}$ **43.** $z^2/2k$
45. $iz^3 + 1$

Problemas Propostos 18.1

1. $20x + 200, 20z + 200$ **3.** $110 - 50xy, 110 + 25iz^2$
5. $F = (110/\ln 2)\text{Ln } z$ **7.** $F = 200 - (100/\ln 2)\text{ Ln } z$
13. Use a Fig. 388 na Seção 17.4 com os planos z e w trocados, e $\cos z = \text{sen } (z + \frac{1}{2}\pi)$.
15. $\Phi = 220 - 110xy$

Problemas Propostos 18.2

1. $u^2 - v^2 = e^{2x}(\cos^2 y - \text{sen}^2 y)$, $\Phi_{xx} = 4e^{2x}(\cos^2 y - \text{sen}^2 y) = -\Phi_{yy}$, $\nabla^2\Phi = 0$
3. Cálculo direto, envolvendo a regra da cadeia e as equações de Cauchy-Riemman
5. Veja a Fig. 389 na Seção 17.4. $\Phi = \text{sen}^2 x \cosh^2 y - \cos^2 x \text{ senh}^2 y$.
9. (i) $\Phi = U_1(1 - xy)$. (ii) $w = iz^2$ mapeia R sobre $-2 \leqq u \leqq 0$, portanto, $\Phi^* = U_1(1 + \frac{1}{2}u)$ $= U_1(1 + \frac{1}{2}(-2xy))$.
11. Pelo Teorema 1 na Seção 17.2
13. $\Phi = 10[1 - (1/\pi)\text{ Arg } (z - 4)]$, $F = 10[1 + (i/\pi)\text{ Ln } (z - 4)]$
15. Os raios correspondentes no plano w fazem ângulos iguais, e o mapeamento é conforme.

Problemas Propostos 18.3

3. $(100/d)y$. Girar de $\pi/2$. **5.** $100 - 240\theta/\pi$
7. $\text{Re } F(z) = 100 + (200/\pi)\text{ Re (arcsen } z)$ **9.** $(240/\pi)\text{ Arg } z$
11. $T_0 + (2/\pi)(T_1 - T_0)\text{ Arg } z$ **13.** $50 + (400/\pi)\text{ Arg } z$

Problemas Propostos 18.4

1. $V = iV_2 = iK$, $\Psi = -Kx = const$, $\Phi = Ky = const$
3. $F(z) = Kz$ (K real positivo)
5. $V = (1 + 2i)K$, $F = (1 - 2i)Kz$
7. $F(z) = z^3$
9. Hipérboles $(x + 1)y = const$. Fluxo em torno de um canto formado por $x = -1$ e o eixo x.
11. $y/(x^2 + y^2) = c$ ou $x^2 + (y - k)^2 = k^2$
13. $F(z) = z/r_0 + r_0/z$
15. Use o fato de que $w = \arccos z$ é $w = \cos z$ com os planos w e z tendo seus papéis invertidos.

Problemas Propostos 18.5

5. $1 - r^2 \cos 2\theta$
7. $2(r \text{ sen } \theta - \frac{1}{2}r^2 \text{ sen } 2\theta + \frac{1}{3}r^3 \text{ sen } 3\theta - + \cdots)$
9. $\frac{3}{4}r^2 \text{ sen } 2\theta - \frac{1}{4}r^6 \text{ sen } 6\theta$
11. $\frac{1}{3}\pi^2 - 4(r \cos \theta - \frac{1}{4}r^2 \cos 2\theta + \frac{1}{9}r^3 \cos 3\theta - + \cdots)$
13. $\dfrac{4}{\pi}\left(r \text{ sen } \theta - \dfrac{1}{9}\, r^3 \text{ sen } 3\theta + \dfrac{1}{25}\, r^5 \text{ sen } 5\theta - + \cdots\right)$

Problemas Propostos 18.6

1. Não; $|z|^2$ não é analítica. **3.** Use (2). $F(\frac{1}{3}) = \frac{25}{9}$ **5.** $\Phi(4, -4) = -12$
7. Use (3). $\Phi(1, 1) = -2$ **11.** $|F(e^{i\theta})|^2 = 2 - 2\cos 2\theta$, $\theta = \pi/2$, Máx. $= 2$
13. $|F(z)| = [\cos^2 2x + \text{senh}^2 2y]^{1/2}$, $z = \pm i$, Máx. $= [1 + \text{senh}^2 2]^{1/2} = \cosh 2 = 3{,}7622$
15. Não

Questões e Problemas de Revisão do Capítulo 18

11. $\Phi = 10(1 - x + y)$, $F = 10 - 10(1 + i)z$

13. $(20/\ln 10)\ \mathrm{Ln}\ z$

15. $(10/\ln 10)(\ln 100 - \ln r)$

17. $\mathrm{Arg}\ z = const$

19. $(-i/\pi)\ \mathrm{Ln}\ z$

23. $T(x, y) = x(2y + 1) = const$

25. Círculos $(x - c)^2 + y^2 = c^2$

27. $F(z) = \dfrac{c}{2\pi}\ \mathrm{Ln}\ (z - 5)$, $\mathrm{Arg}\ (z - 5) = c$

29. $20 + \dfrac{80}{\pi}\left(r\ \mathrm{sen}\ \theta + \dfrac{1}{3}\, r^3\ \mathrm{sen}\ 3\theta + \dfrac{1}{5}\, r^5\ \mathrm{sen}\ 5\theta + \cdots\right)$

APÊNDICE 3

Material Auxiliar

A3.1 Fórmulas para Funções Especiais

Para tabelas de valores numéricos, veja o Apêndice 5.

Função exponencial e^x (Fig. 544)

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353$$

(1) $$e^x e^y = e^{x+y}, \qquad e^x/e^y = e^{x-y}, \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

Logaritmo natural (Fig. 545)

(2) $$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln(x/y) = \ln x - \ln y, \qquad \ln(x^a) = a \ln x$$

O $\ln x$ é o inverso de e^x, e $e^{\ln x} = x$, $e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = 1/x$.

Logaritmo de base dez $\log_{10} x$ ou, simplesmente, $\log x$

(3) $$\log x = M \ln x, \qquad M = \log e = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18917$$

(4) $$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \qquad \frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 54684$$

O $\log x$ é o inverso de 10^x, e $10^{\log x} = x$, $10^{-\log x} = 1/x$.

Funções seno e cosseno (Figs. 546, 547). No cálculo, os ângulos são medidos em radianos, de modo que sen x e cos x têm um período de 2π.

sen x é ímpar, sen $(-x) = -\text{sen } x$, e cos x é par, cos $(-x) = \cos x$.

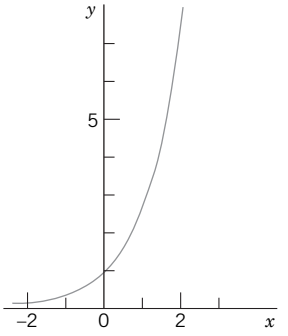


Fig. 544. Função exponencial e^x

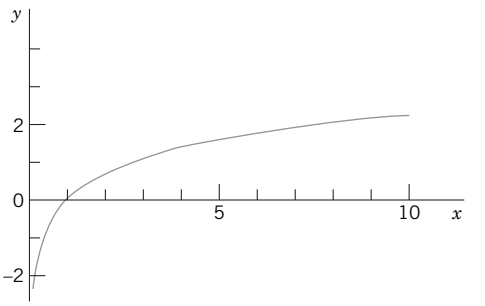


Fig. 545. Logaritmo natural $\ln x$

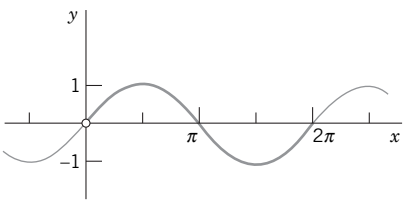


Fig. 546. sen x

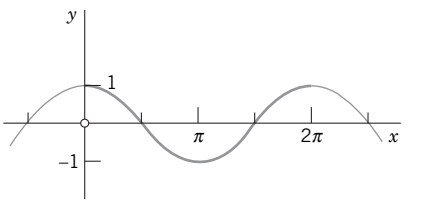


Fig. 547. cos x

$$1° = 0{,}01745\ 32925\ 19943 \text{ radianos}$$

$$1 \text{ radiano} = 57° 17' 44{,}80625''$$

$$= 57{,}29577\ 95131°$$

(5) $$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

(6) $$\begin{cases} \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

(7) $$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

(8) $$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

(9) $$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(10) $$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x), \qquad \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(11) $$\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\ \cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\ \operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)] \end{cases}$$

(12) $$\begin{cases} \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen} \dfrac{u + v}{2} \cos \dfrac{u - v}{2} \\ \cos u + \cos v = 2 \cos \dfrac{u + v}{2} \cos \dfrac{u - v}{2} \\ \cos v - \cos u = 2 \operatorname{sen} \dfrac{u + v}{2} \operatorname{sen} \dfrac{u - v}{2} \end{cases}$$

(13) $$A \cos x + B \operatorname{sen} x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \pm \delta), \qquad \tan \delta = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{B}{A}$$

(14) $$A \cos x + B \operatorname{sen} x = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(x \pm \delta), \qquad \tan \delta = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{A}{B}$$

Tangente, cotangente, secante e cossecante (Figs. 548, 549)

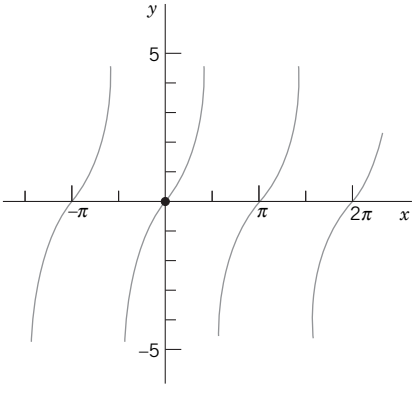


Fig. 548. tan *x*

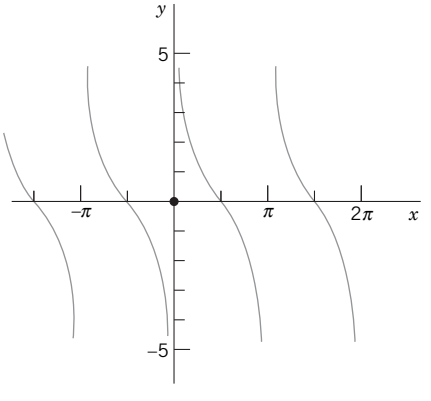


Fig. 549. cot *x*

(15) $$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

(16) $$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \tan (x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Funções hiperbólicas (seno hiperbólico é senh x etc.; Figs. 550, 551)

(17) $$\operatorname{senh} x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

(18) $$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

(19) $$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x, \qquad \cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$$

(20) $$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

(21) $$\operatorname{senh}^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \qquad \cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

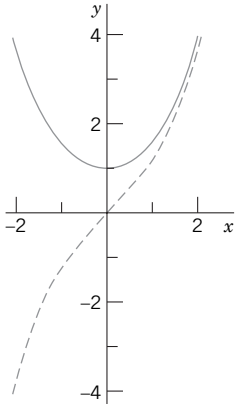


Fig. 550. senh x (tracejado) e cosh x

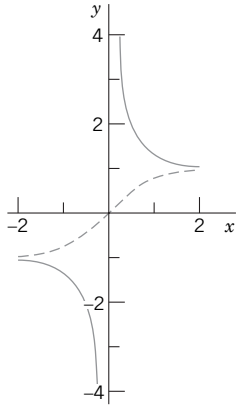


Fig. 551. tanh x (tracejado) e coth x

(22) $$\begin{cases} \operatorname{senh} (x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y \\ \cosh (x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \end{cases}$$

(23) $$\tanh (x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

Função gama (Fig. 552 e Tabela A2 do Apêndice 5). A função gama $\Gamma(\alpha)$ é definida pela integral

(24) $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1}\, dt \qquad (\alpha > 0)$$

que possui significado somente se $\alpha > 0$ (ou, se considerarmos α complexo, para α cuja parte real seja positiva). A integração por partes nos fornece a importante *relação funcional da função gama,*

(25) $$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

De (24) prontamente temos $\Gamma(1) = 1$; logo, se α for um inteiro positivo, que chamaremos de k, então, repetindo o procedimento de (25), obtemos

(26) $$\Gamma(k + 1) = k! \qquad (k = 0, 1, \cdots).$$

Isso mostra que *a função gama pode ser considerada como uma generalização da função fatorial elementar.* [Algumas vezes a notação $(\alpha - 1)!$ é usada para $\Gamma(\alpha)$, mesmo para valores não-inteiros de α, e a função gama é também conhecida como **função fatorial**.]

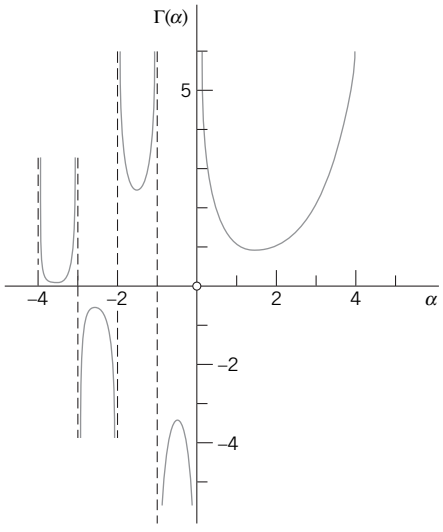


Fig. 552. Função gama

Pela repetida aplicação de (25), obtemos

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + k)}$$

e podemos usar a seguinte relação

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{27}$$

para definir a função gama para valores negativos de α ($\neq -1, -2, \ldots$), escolhendo para k o menor valor inteiro tal que $\alpha + k + 1 > 0$. *Juntamente com* (24), *isto então fornece uma definição de* $\Gamma(\alpha)$ *para todo* α *diferente de zero ou de um inteiro negativo* (Fig. 552).

É possível demonstrar que a função gama também pode ser representada como o limite de um produto, a saber, usando-se a fórmula

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{\alpha}}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots). \tag{28}$$

De (27) ou (28), vemos que, para α complexo, a função gama $\Gamma(\alpha)$ é uma função meromórfica com pólos simples em $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$

Uma aproximação da função gama para grandes valores positivos de α é dada pela **fórmula de Stirling**

$$\Gamma(\alpha + 1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{29}$$

onde e é a base dos logaritmos naturais. Finalmente, mencionamos o valor especial

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{30}$$

Funções gama incompletas

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt, \qquad Q(\alpha, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt \qquad (\alpha > 0) \tag{31}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{32}$$

Função beta

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}\, dt \qquad (x > 0, y > 0) \tag{33}$$

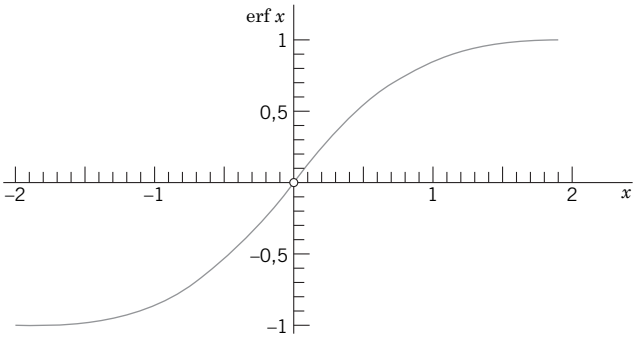


Fig. 553. Função erro

Representação em termos de funções gama:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \tag{34}$$

Função erro (Fig. 553 e Tabela A4 do Apêndice 5)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \tag{35}$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{36}$$

$\operatorname{erf}(\infty) = 1$, *função erro complementar*

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt \tag{37}$$

Integrais de Fresnel[1] (Fig. 554)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt, \qquad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt \tag{38}$$

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\pi/8}$, $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\pi/8}$, *funções complementares*

$$\begin{aligned} \mathrm{c}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\, dt \\ \mathrm{s}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \operatorname{sen}(t^2)\, dt \end{aligned} \tag{39}$$

Seno integral (Fig. 555 e Tabela A4 do Apêndice 5)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \tag{40}$$

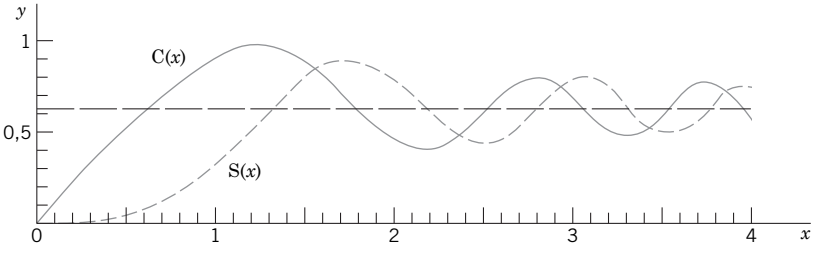


Fig. 554. Integrais de Fresnel

[1] AUGUSTIN FRESNEL (1788–1827), físico e matemático francês. Para tabelas, veja a Ref. [GR1].

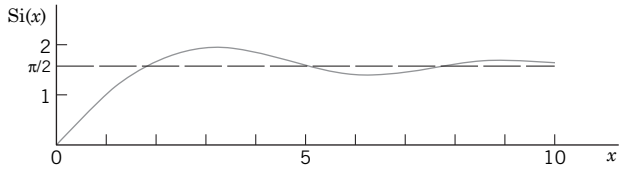


Fig. 555. Seno integral

Si(∞) = $\pi/2$, *função complementar*

$$\text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\text{sen } t}{t}\, dt \tag{41}$$

Cosseno integral (Tabela A4 do Apêndice 5)

$$\text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \qquad (x > 0) \tag{42}$$

Integral exponencial

$$\text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \qquad (x > 0) \tag{43}$$

Integral logarítmica

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \tag{44}$$

A3.2 Derivadas Parciais

Para fórmulas de derivação, veja a contracapa frontal.

Consideremos que $z = f(x, y)$ seja uma função real de duas variáveis reais independentes, x e y. Se mantivermos y constante, ou seja, $y = y_1$, e considerarmos x como uma variável, então $f(x, y_1)$ dependerá somente de x. Se a derivada de $f(x, y_1)$ com relação a x para $x = x_1$ existir, então o valor dessa derivada é chamado de **derivada parcial** de $f(x, y)$ *em relação a x no ponto* (x_1, y_1), sendo denotado por

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)} \qquad \text{ou por} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)}$$

Outras notações são

$$f_x(x_1, y_1) \qquad \text{e} \qquad z_x(x_1, y_1);$$

que podem ser empregados quando os símbolos subscritos não são usados para outros propósitos, de modo a não haver perigo de confusão.

Temos, portanto, da definição de derivada,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x}\,. \tag{1}$$

A derivada parcial de $z = f(x, y)$ com relação a y é definida de forma similar; agora mantemos x constante, ou seja, igual a x_1, e derivamos $f(x_1, y)$ com relação a y. Assim,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)}{\Delta y}\,. \tag{2}$$

Outras notações são $f_y(x_1, y_1)$ e $z_y(x_1, y_1)$.

Obviamente, os valores dessas duas derivadas parciais dependerão em geral do ponto (x_1, y_1). Logo, as derivadas parciais $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ em um ponto variável (x, y) são funções de x e y. A função $\partial z/\partial x$ é obtida como no cálculo comum, por meio da derivação de $z = f(x, y)$ com relação a x, ***tratando-se y como uma constante,*** e $\partial z/\partial y$ é obtida pela derivação de z com relação a y, ***tratando-se x como uma constante.***

EXEMPLO 1 Consideremos $z = f(x, y) = x^2y + x \operatorname{sen} y$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \operatorname{sen} y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cos y. \qquad \blacksquare$$

As derivadas parciais $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ de uma função $z = f(x, y)$ possuem uma **interpretação geométrica** muito simples. A função $z = f(x, y)$ pode ser representada por uma superfície no espaço. A equação $y = y_1$ representa então a interseção de um plano vertical com a superfície de uma curva, e a derivada parcial $\partial z/\partial x$ num ponto (x_1, y_1) é a inclinação da tangente (isto é, a tan α onde α é o ângulo mostrado na Fig. 556) na curva. De forma similar, a derivada parcial $\partial z/\partial y$ no ponto (x_1, y_1) é a inclinação da tangente à curva $x = x_1$ na superfície $z = f(x, y)$ em (x_1, y_1).

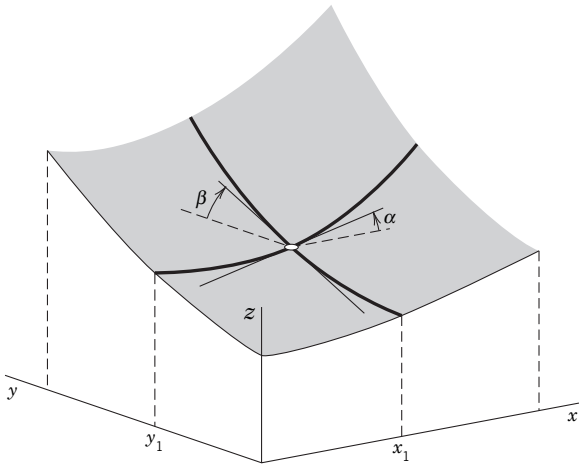


Fig. 556. Interpretação geométrica das derivadas parciais primeiras

As derivadas parciais $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ são chamadas de *derivadas parciais primeiras* ou *derivadas parciais de primeira ordem*. Derivando-se essas derivadas mais uma vez, obtemos as quatro *derivadas parciais segundas* (ou *derivadas parciais de segunda ordem*)[2]

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que, se todas estas derivadas são contínuas, então as duas derivadas parciais mistas são iguais, de modo que a ordem da derivação é irrelevante (veja a Ref. [GR4] do Apêndice 1), isto é,

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

EXEMPLO 2 Para a função do Exemplo 1.

$$f_{xx} = 2y, \qquad f_{xy} = 2x + \cos y = f_{yx}, \qquad f_{yy} = -x \operatorname{sen} y. \qquad \blacksquare$$

[2] **CUIDADO!** Na notação subscrita, os caracteres subscritos vão aparecendo na ordem da derivação, enquanto, na notação "∂", a ordem é inversa.

Derivando-se uma vez mais as derivadas parciais segundas com relação a x e y, respectivamente, obtemos as *derivadas parciais terceiras* ou *derivadas parciais de terceira ordem* de f etc.

Se considerarmos uma função $f(x, y, z)$ de ***três variáveis independentes***, então temos as três derivadas parciais primeiras $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ e $f_z(x, y, z)$. Aqui, f_x é obtida pela derivação de f com relação a x, ***tratando-se tanto y como z como se fossem constantes***. Portanto, analogamente a (1), temos

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1,z_1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - f(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x},$$

etc. Derivando-se f_x, f_y e f_z novamente dessa mesma forma, obtemos as derivadas parciais segundas de f etc.

EXEMPLO 3 Consideremos $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy\,e^z$. Então,

$$f_x = 2x + y\,e^z, \qquad f_y = 2y + x\,e^z, \qquad f_z = 2z + xy\,e^z,$$
$$f_{xx} = 2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = e^z, \qquad f_{xz} = f_{zx} = y\,e^z,$$
$$f_{yy} = 2, \qquad f_{yz} = f_{zy} = x\,e^z, \qquad f_{zz} = 2 + xy\,e^z.$$

■

A3.3 Seqüências e Séries

Veja também o Capítulo 15.

Seqüências Reais Monótonas

Dizemos que uma seqüência real $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ é uma **seqüência monótona** se ela apresenta **crescimento monótono**, isto é,

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots$$

ou **decrescimento monótono**, ou seja,

$$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots.$$

Dizemos que $x_1, x_2, \cdots$ é uma **seqüência limitada** se existe uma constante positiva K tal que $|x_n| < K$ para todo n.

TEOREMA 1

Se uma seqüência real é limitada e monótona, ela converge.

PROVA Seja $x_1, x_2, \cdots$ uma seqüência monotonamente crescente e limitada. Então, seus termos são menores que um certo número B e, desde que $x_1 \leqq x_n$ para todo n, eles situam-se no intervalo $x_1 \leqq x_n \leqq B$, que será denotado por I_0. Fazemos então uma bipartição de I_0; ou seja, subdividimos esse intervalo em duas partes de igual tamanho. Se a metade direita (juntamente com suas extremidades) contiver termos da seqüência, será chamada de I_1. Se não contiver termos da seqüência, então a metade esquerda de I_0 (juntamente com suas extremidades) será chamada de I_1. Este é o primeiro passo.

No segundo passo, fazemos uma bipartição de I_1, selecionamos uma das metades pelo mesmo critério e a chamamos de I_2, e assim por diante (veja a Fig. 557).

Dessa forma, obtemos intervalos $I_0, I_1, I_2, \cdots$ cada vez menores e com as seguintes propriedades. Cada I_m contém todo I_n para $n > m$. Nenhum termo da seqüência situa-se à direita de I_m, e, como a seqüência é monotonamente crescente, todo x_n com n maior que algum número N pertence a I_m; naturalmente, N irá em geral depender de m. Os comprimentos de I_m aproximam-se de zero à medida que m se aproxima do infinito. Logo, há precisamente um número, que chamaremos de L, pertencente a todos esses intervalos,[3] e podemos agora facilmente provar que a seqüência é convergente com o limite L.

[3] Essa constatação parece óbvia, mas na realidade não é; ela pode ser considerada como um axioma do sistema de números reais da seguinte forma. Consideremos que $J_1, J_2, \ldots$ sejam intervalos fechados tais que cada J_m contém todo J_n com $n > m$, e os comprimentos de J_m aproximam-se de zero à medida que m aproxima-se do infinito. Então, existe precisamente um número real que está contido em todos esses intervalos. Este é o chamado **axioma de Cantor–Dedekind**, que recebeu o nome dos matemáticos alemães GEORG CANTOR (1845–1918), o criador da teoria dos conjuntos, e RICHARD DEDEKIND (1831–1916), conhecido por seus trabalhos fundamentais em teoria dos números. Para mais detalhes, veja a Referência [GR2] do Apêndice 1. (Um intervalo I é dito **fechado** se suas duas extremidades são consideradas pontos pertencentes a I. E ele é dito **aberto** se suas extremidades não são consideradas como pontos de I.)

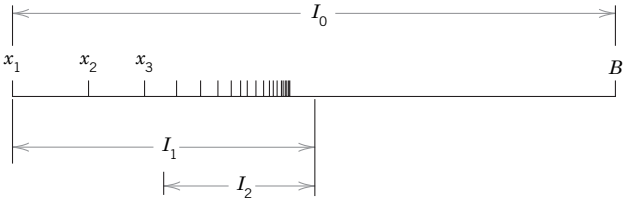


Fig. 557. Prova do Teorema 1

De fato, dado um $\epsilon > 0$, escolhemos m de tal forma que o comprimento de I_m seja menor que ϵ. Então, L e todo x_n com $n > N(m)$ estão contidos em I_m, e, portanto, $|x_n - L| < \epsilon$ para todo n. Isso completa a prova para uma seqüência crescente. Para uma seqüência decrescente, a demonstração é a mesma, exceto por uma conveniente troca de "esquerda" por "direita" na construção desses intervalos. ■

Séries Reais

TEOREMA 2

Teste de Leibniz para Séries Reais

Consideremos $x_1, x_2, \cdots$ real e monotonamente decrescente em direção a 0, ou seja,

(1) (a) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots$, (b) $\lim_{m\to\infty} x_m = 0$.

Então, a série com termos de sinais alternados

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + - \cdots$$

converge, e para o resto R_n, após o n-ésimo termo, temos a estimativa

(2) $$|R_n| \leqq x_{n+1}.$$

PROVA Consideremos que s_n seja a n-ésima soma parcial da série. Então, devido a (1a),

$$s_1 = x_1, \qquad s_2 = x_1 - x_2 \leqq s_1,$$

$$s_3 = s_2 + x_3 \geqq s_2, \qquad s_3 = s_1 - (x_2 - x_3) \leqq s_1,$$

de modo que $s_2 \leqq s_3 \leqq s_1$. Procedendo dessa forma, concluímos que (Fig. 558)

(3) $$s_1 \geqq s_3 \geqq s_5 \geqq \cdots \geqq s_6 \geqq s_4 \geqq s_2$$

o que mostra que as somas parciais ímpares formam uma seqüência monótona limitada, o mesmo ocorrendo com as somas parciais pares. Logo, pelo Teorema 1, ambas as seqüências convergem, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s, \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s^*.$$

Agora, como $s_{2n+1} - s_{2n} = x_{2n+1}$, prontamente vemos que (1b) implica

$$s - s^* = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0.$$

Conseqüentemente, $s^* = s$, e as séries convergem com a soma s.

Provemos a estimativa (2) para o restante. Como $s_n \to s$, segue de (3) que

$$s_{2n+1} \geqq s \geqq s_{2n} \qquad \text{e também} \qquad s_{2n-1} \geqq s \geqq s_{2n}.$$

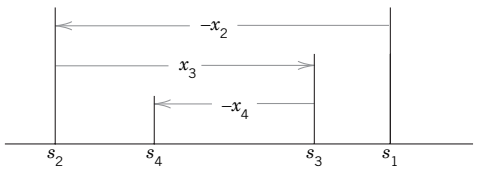


Fig. 558. Prova do teste de Leibniz

Subtraindo s_{2n} e s_{2n-1}, respectivamente, obtemos

$$s_{2n+1} - s_{2n} \geqq s - s_{2n} \geqq 0, \qquad 0 \geqq s - s_{2n-1} \geqq s_{2n} - s_{2n-1}.$$

Nessas desigualdades, a primeira expressão é igual a x_{2n+1}, a última é igual a $-x_{2n}$, e as expressões entre os sinais de desigualdade são os restos R_{2n} e R_{2n-1}. Portanto, as desigualdades podem ser escritas como

$$x_{2n+1} \geqq R_{2n} \geqq 0, \qquad 0 \geqq R_{2n-1} \geqq -x_{2n}$$

e vemos que elas implicam (2). Isso completa a demonstração. ■

A3.4 Grad, Div, Rot, ∇^2 em Coordenadas Curvilíneas

Para simplificar as fórmulas, escrevemos as coordenadas cartesianas $x = x_1, y = x_2, z = x_3$. Denotamos as coordenadas curvilíneas por q_1, q_2, q_3. Por cada ponto P, passam três superfícies coordenadas $q_1 = const.$, $q_2 = const.$, $q_3 = const.$ Elas cruzam-se ao longo das curvas coordenadas. Assumimos as três curvas coordenadas através de P como **ortogonais** (perpendiculares umas às outras). Escrevemos as transformações das coordenadas como

(1) $$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3), \qquad x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3), \qquad x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3).$$

Transformações correspondentes de grad, div, rot e ∇^2 podem todas ser escritas utilizando-se

(2) $$h_j^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right)^2 .$$

Depois das coordenadas cartesianas, as mais importantes são as **coordenadas cilíndricas** $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = z$ (Figura 559a da página A72) definidas por

(3) $$x_1 = q_1 \cos q_2 = r \cos \theta, \qquad x_2 = q_1 \operatorname{sen} q_2 = r \operatorname{sen} \theta, \qquad x_3 = q_3 = z$$

e as **coordenadas esféricas** $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \Phi$ (Fig. 559b) definidas por[4]

(4) $$x_1 = q_1 \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 = r \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \qquad x_2 = q_1 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$
$$x_3 = q_1 \cos q_3 = r \cos \phi.$$

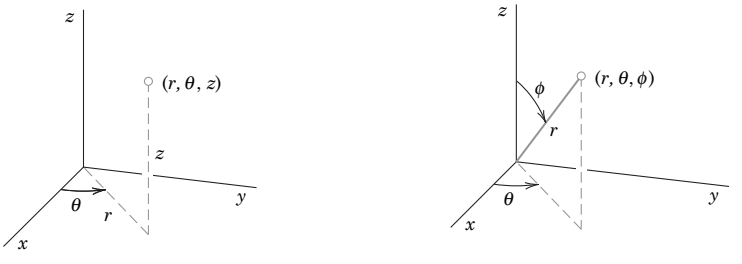
Além das fórmulas gerais para coordenadas ortogonais quaisquer q_1, q_2, q_3, forneceremos fórmulas adicionais para esses importantes casos especiais.

Elemento Linear *ds*. Em coordenadas cartesianas,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \qquad \text{(Seção 9.5).}$$

Para as coordenadas q,

(5) $$ds^2 = h_1^2\, dq_1^2 + h_2^2\, dq_2^2 + h_3^2\, dq_3^2.$$



(*a*) Coordenadas cilíndricas (*b*) Coordenadas esféricas

Fig. 559. Coordenadas curvilíneas especiais

[4] Esta é a notação usada em cálculo e em muitos outros livros. Trata-se de uma notação lógica, visto que nela θ desempenha o mesmo papel que em coordenadas polares. **CUIDADO!** Alguns livros trocam os papéis de θ e Φ.

(5′) $$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$$ (Coordenadas cilíndricas).

Para coordenadas polares, temos $dz^2 = 0$.

(5″) $$ds^2 = dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\phi\,d\theta^2 + r^2\,d\phi^2$$ (Coordenadas esféricas).

Gradiente. grad $f = \nabla f = [f_{x_1},\quad f_{x_2},\quad f_{x_3}]$ (derivadas parciais; Seção 9.7). No sistema q, com $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ denotando vetores unitários na direção positiva de q_1, q_2, q_3, curvas coordenadas, respectivamente,

(6) $$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\,\mathbf{u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\,\mathbf{v} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\,\mathbf{w}$$

(6′) $$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{w}$$ (Coordenadas cilíndricas).

(6″) $$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{u} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{v} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\mathbf{w}$$ (Coordenadas esféricas).

Divergente div $\mathbf{F} = \nabla\bullet\mathbf{F} = (F_1)_{x_1} + (F_2)_{x_2} + (F_3)_{x_3}$ ($\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$, Seção 9.8);

(7) $$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\bullet\mathbf{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3h_1F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2F_3)\right]$$

(7′) $$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\bullet\mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$ (Coordenadas cilíndricas).

(7″) $$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\bullet\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_1) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi\,F_3)$$ (Coordenadas esféricas).

Laplaciano $\nabla^2 f = \nabla\bullet\nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + f_{x_3x_3}$ (Seção 9.8):

(8) $$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right]$$

(8′) $$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$ (Coordenadas cilíndricas).

(8″) $$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$ (Coordenadas esféricas).

Rotacional (Seção 9.9):

(9) $$\operatorname{Rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{u} & h_2\mathbf{v} & h_3\mathbf{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}.$$

Para coordenadas cilíndricas, temos em (9) (como nas fórmulas anteriores)

$$h_1 = h_r = 1, \qquad h_2 = h_\theta = q_1 = r, \qquad h_3 = h_z = 1$$

e, para coordenadas esféricas, temos

$$h_1 = h_r = 1, \qquad h_2 = h_\theta = q_1 \operatorname{sen} q_3 = r \operatorname{sen}\phi, \qquad h_3 = h_\phi = q_1 = r.$$

APÊNDICE 4

Provas Adicionais

Seção 13.4

PROVA DO TEOREMA 2 Equações de Cauchy–Riemann

Provemos que as equações de Cauchy–Riemann

$$(1) \qquad u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

são suficientes para a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ser analítica; mais precisamente, *se a parte real u e a parte imaginária v de f(z) satisfazem a* (1) *num domínio D do plano complexo e se as derivadas parciais em* (1) *são* ***contínuas*** *em D, então f(z) é analítica em D.*

Nessa prova, escrevamos $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ e $\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$. A idéia da demonstração é a seguinte.

(a) Expressamos Δf em termos das derivadas parciais primeiras de u e v, aplicando o teorema do valor médio da Seção 9.6.

(b) Eliminamos as derivadas parciais com relação a y pela aplicação das equações de Cauchy–Riemann.

(c) Fazemos Δz se aproximar de zero e mostramos que, então, o valor obtido de $\Delta f/\Delta z$ aproxima-se de um limite, que é igual a $u_x + iv_x$, o lado direito de (4) da Seção 13.4, independentemente do modo como se aproxima de zero.

(a) Consideremos que P:(x,y) seja um ponto qualquer fixo em D. Como D é um domínio, ele contém uma vizinhança de P. Podemos escolher um ponto Q: $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nessa vizinhança de tal forma que o segmento de reta PQ esteja em D. Devido a nossas suposições de continuidade, podemos aplicar o teorema do valor médio da Seção 9.6. Isso fornece

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = (\Delta x)u_x(M_1) + (\Delta y)u_y(M_1)$$
$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = (\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)v_y(M_2)$$

onde M_1 e M_2 ($\neq M_1$ em geral!) são pontos adequados nesse segmento. A primeira linha é Re Δf e a segunda é Im Δf, de modo que

$$\Delta f = (\Delta x)u_x(M_1) + (\Delta y)u_y(M_1) + i\big[(\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)v_y(M_2)\big].$$

(b) $u_y = -v_x$ e $v_y = u_x$ pelas equações de Cauchy–Riemann, de modo que

$$\Delta f = (\Delta x)u_x(M_1) - (\Delta y)v_x(M_1) + i\big[(\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)u_x(M_2)\big].$$

Além disso, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, de maneira que podemos escrever $\Delta x = \Delta z - i\Delta y$ no primeiro termo e $\Delta y = (\Delta z - \Delta x)/i = -i(\Delta z - \Delta x)$ no segundo termo. Isso nos fornece

$$\Delta f = (\Delta z - i\Delta y)u_x(M_1) + i(\Delta z - \Delta x)v_x(M_1) + i\big[(\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)u_x(M_2)\big].$$

Efetuando as multiplicações e reordenando os termos, obtemos

$$\Delta f = (\Delta z)u_x(M_1) - i\Delta y\{u_x(M_1) - u_x(M_2)\} + i\big[(\Delta z)v_x(M_1) - \Delta x\{v_x(M_1) - v_x(M_2)\}\big].$$

Dividindo por Δz, agora temos

$$(A) \qquad \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x(M_1) + iv_x(M_1) - \frac{i\Delta y}{\Delta z}\{u_x(M_1) - u_x(M_2)\} - \frac{i\Delta x}{\Delta z}\{v_x(M_1) - v_x(M_2)\}.$$

(c) Finalmente, façamos Δz se aproximar de zero e notamos que $|\Delta y/\Delta z| \leqq 1$ e $|\Delta x/\Delta z| \leqq 1$ em (A). Então, Q: $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ aproxima-se de P: (x, y), de modo que M_1 e M_2 devem se aproximar de P. Além disso, uma vez que se supõe que as derivadas parciais em (A) sejam contínuas, elas aproximam-se de seus valores em P. Em particular, as diferenças entre chaves $\{\cdots\}$ em (A) aproximam-se de zero. Logo, o limite do lado direito de

(A) existe e independe da trajetória ao longo da qual $\Delta z \to 0$. Vemos que esse limite é igual ao lado direito de (4) da Seção 13.4. Isso significa que $f(z)$ é analítica em todo ponto z em D, e a demonstração está completa. ■

Seção 14.2

PROVA DE GOURSAT DO TEOREMA DA INTEGRAL DE CAUCHY Goursat provou o teorema da integral de Cauchy sem fazer a suposição de que $f'(z)$ seja contínua, do seguinte modo.

Começamos com o caso no qual C é o contorno de um triângulo. Orientamos C no sentido anti-horário. Unindo-se os pontos médios dos lados, subdividimos o triângulo em quatro triângulos congruentes (Fig. 562). Façamos C_{I}, C_{II}, C_{III}, C_{IV} denotarem seus contornos. Afirmamos então que (veja a Fig. 562).

$$\oint_C f\,dz = \oint_{C_{\mathrm{I}}} f\,dz + \oint_{C_{\mathrm{II}}} f\,dz + \oint_{C_{\mathrm{III}}} f\,dz + \oint_{C_{\mathrm{IV}}} f\,dz. \tag{1}$$

Com efeito, no lado direito integramos ao longo de cada um dos três segmentos da subdivisão em ambas as direções possíveis (Fig. 562), de modo que as integrais correspondentes cancelam-se aos pares, e a soma das integrais à direita iguala-se à das integrais à esquerda. Agora, escolhemos uma integral à direita que possua o maior valor absoluto e chamamos seu respectivo caminho de C_1. Então, pela desigualdade do triângulo (Seção 13.2),

$$\left|\oint_C f\,dz\right| \leqq \left|\oint_{C_{\mathrm{I}}} f\,dz\right| + \left|\oint_{C_{\mathrm{II}}} f\,dz\right| + \left|\oint_{C_{\mathrm{III}}} f\,dz\right| + \left|\oint_{C_{\mathrm{IV}}} f\,dz\right| \leqq 4\left|\oint_{C_1} f\,dz\right|.$$

Agora, como antes, subdividimos o triângulo limitado por C_1 e selecionamos um triângulo da subdivisão com o contorno de C_2 para o qual

$$\left|\oint_{C_1} f\,dz\right| \leqq 4\left|\oint_{C_2} f\,dz\right|. \qquad \text{Então} \qquad \left|\oint_C f\,dz\right| \leqq 4^2\left|\oint_{C_2} f\,dz\right|.$$

Continuando dessa maneira, obtemos uma seqüência de triângulos T_1, T_2,$\cdots$ com contornos C_1, C_2,$\cdots$ que se assemelham e que são tais que T_n está contido em T_m quando $n > m$, e

$$\left|\oint_C f\,dz\right| \leqq 4^n\left|\oint_{C_n} f\,dz\right|, \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

Façamos z_0 ser o ponto que pertence a todos esses triângulos. Como f é derivável em $z = z_0$, a derivada $f'(z_0)$ existe. Então façamos

$$h(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0). \tag{3}$$

Resolvendo isso algebricamente para $f(z)$, temos

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + h(z)(z - z_0).$$

Integrando ao longo do contorno C_n do triângulo T_n, temos

$$\oint_{C_n} f(z)\,dz = \oint_{C_n} f(z_0)\,dz + \oint_{C_n} (z - z_0)f'(z_0)\,dz + \oint_{C_n} h(z)(z - z_0)\,dz.$$

Como $f(z_0)$ e $f'(z_0)$ são constantes e C_n tem um contorno fechado, as duas primeiras integrais à direita são zero, como segue da prova de Cauchy, que é aplicável pois os integrandos de fato possuem derivadas contínuas (0 e *const.*, respectivamente). Portanto, temos

$$\oint_{C_n} f(z)\,dz = \oint_{C_n} h(z)(z - z_0)\,dz.$$

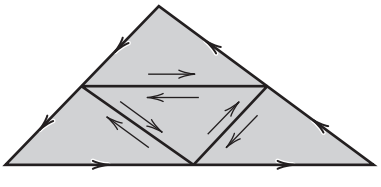


Fig. 562. Prova do teorema da integral de Cauchy

Como $f'(z_0)$ é o limite do quociente das diferenças em (3), para um dado $\epsilon > 0$, podemos obter um $\delta > 0$ tal que

(4) $$|h(z)| < \epsilon \qquad \text{quando} \qquad |z - z_0| < \delta.$$

Podemos agora fazer n tão grande quanto necessário para fazer com que o triângulo esteja no interior do disco $|z - z_0| < \delta$. Chamemos de L_n o comprimento de C_n. Então, $|z - z_0| < L_n$ para todo z em C_n e z_0 em T_n. Disso e de (4), temos $|h(z)(z - z_0)| < \epsilon L_n$. A desigualdade *ML* da Seção 14.1 agora fornece

(5) $$\left|\oint_{C_n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{C_n} h(z)(z - z_0)\,dz\right| \leqq \epsilon L_n \cdot L_n = \epsilon {L_n}^2.$$

Agora, denotamos o comprimento de C por L. Então, a trajetória C_1 tem o comprimento $L_1 = L/2$, o contorno C_2 tem o comprimento $L_2 = L_1/2 = L/4$ etc. e C_n tem o comprimento $L_n = L/2^n$. Logo, ${L_n}^2 = L^2/4^n$. De (2) e (5), obtemos, portanto,

$$\left|\oint_C f\,dz\right| \leqq 4^n \left|\oint_{C_n} f\,dz\right| \leqq 4^n \epsilon {L_n}^2 = 4^n \epsilon \frac{L^2}{4^n} = \epsilon L^2.$$

Escolhendo ϵ (> 0) suficientemente pequeno, podemos fazer a expressão à direita ser tão pequena quanto queiramos, ao passo que a expressão à esquerda é o valor definido de uma integral. Conseqüentemente, esse valor deve ser zero e a demonstração está completa.

A prova para *o caso em que C é o contorno de um polígono* decorre da demonstração anterior subdividindo-se o polígono em triângulos (Fig. 563). A integral correspondente a cada um desses triângulos vale zero. A soma dessas integrais corresponde à integral ao longo de C, pois integramos ao longo de cada segmento da subdivisão em ambas as direções, e as integrais correspondentes cancelam-se aos pares, de modo que ficamos com a integral ao longo de C.

O caso geral de um contorno fechado simples C pode ser reduzido ao caso procedente inscrevendo-se em C um polígono fechado de cordas P, que se aproxima de C de modo "suficientemente acurado", e é possível provar que há um polígono P tal que a integral ao longo de P difere da integral ao longo de C por menos do que um número real positivo preestabelecido $\tilde{\epsilon}$, não importando quão pequeno ele seja. Os detalhes dessa demonstração são complicados, podendo ser encontrados na Ref. [D6] do Apêndice 1. ■

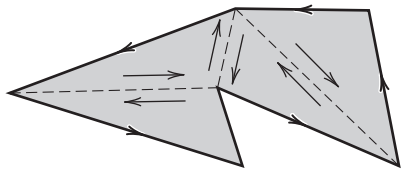


Fig. 563. Prova do teorema da integral de Cauchy para um polígono

Seção 15.1

PROVA DO TEOREMA 4 Princípio da Convergência de Cauchy para Séries

(a) Nessa prova, precisamos de dois conceitos e de um teorema, que mencionaremos primeiro.

1. Uma **seqüência limitada** $s_1, s_2, \cdots$ é uma seqüência cujos termos pertencem todos a um disco de raio K (finito mas suficientemente grande) centrado na origem; logo $|s_n| < K$ para todo n.

2. Um **ponto-limite** a de uma seqüência $s_1, s_2, \cdots$ é um ponto tal que, dado um $\epsilon > 0$, há outros infinitos termos que satisfazem a $|s_n - a| < \epsilon$. (Note que isso *não* implica em convergência, pois pode haver ainda infinitos termos que não estejam contidos nesse círculo de raio ϵ e centro a.)

Exemplo: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \cdots$ tem os pontos-limite 0 e 1 e diverge.

3. Uma seqüência limitada no plano complexo possui pelo menos um ponto-limite. (Teorema de Bolzano–Weierstrass; demonstração a seguir. Lembremos que "seqüência" sempre significa seqüência *infinita*.)

(b) Passemos agora à própria demonstração de que $z_1 + z_2 + \cdots$ converge se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um N tal que

(1) $$|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N \text{ e } p = 1, 2, \cdots.$$

Aqui, pela definição de somas parciais,

$$s_{n+p} - s_n = z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}.$$

Escrevendo $n + p = r$, vemos que (1) equivale a

$$(1^*) \qquad |s_r - s_n| < \epsilon \qquad \text{para todo } r > N \text{ e } n > N.$$

Suponha que $s_1, s_2, \cdots$ converge. Denote seu limite por s. Então, para um dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um N tal que

$$|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo } n > N.$$

Logo, se $r > N$ e $n > N$, então, pela desigualdade triangular (Seção 13.2),

$$|s_r - s_n| = |(s_r - s) - (s_n - s)| \leqq |s_r - s| + |s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja, (1*) é válida.

(c) Inversamente, suponha que $s_1, s_2, \cdots$ satisfaz (1*). Vamos primeiramente provar que, então, a seqüência deve ser limitada. Com efeito, escolha um ϵ fixo e um valor fixo para $n = n_0 > N$ em (1*). Então, (1*) implica que todo s_r com $r > N$ situa-se no disco de raio ϵ e centro s_{n_0} e somente *um número finito de termos* $s_1, \cdots, s_N$ podem não estar contidos no disco. Obviamente, agora podemos encontrar um círculo tão grande que esse disco e toda essa quantidade finita de termos pertençam a esse novo círculo. Logo, a seqüência é limitada. Pelo teorema de Bolzano–Weierstrass, ela possui pelo menos um ponto-limite, que chamaremos de s.

Vamos agora mostrar que a seqüência é convergente com o limite s. Consideremos um valor dado de $\epsilon > 0$. Então, há um N^* tal que $|s_r - s_n| < \epsilon/2$ para todo $r > N^*$ e $n > N^*$, de acordo com (1*). Além disso, pela definição de ponto-limite, $|s_n - s| < \epsilon/2$ para *um n infinito*, de modo que podemos encontrar e fixar um $n > N^*$ tal que $|s_n - s| < \epsilon/2$. Juntando isso, para *todo* $r > N^*$,

$$|s_r - s| = |(s_r - s_n) + (s_n - s)| \leqq |s_r - s_n| + |s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon;$$

ou seja, a seqüência $s_1, s_2, \cdots$ é convergente com o limite s. ■

TEOREMA

Teorema de Bolzano–Weierstrass[3]

Uma seqüência infinita limitada $z_1, z_2, z_3, \cdots$ no plano complexo tem pelo menos um ponto-limite.

PROVA Obviamente, precisamos de ambas as condições: uma seqüência finita não pode ter um ponto-limite e a seqüência 1, 2, 3, $\cdots$, que é infinita mas não limitada, não possui um ponto-limite. Para provar o teorema, consideremos uma seqüência infinita limitada $z_1, z_2, \cdots$ e façamos K de forma que $|z_n| < K$ para todo n. Se apenas um número finito de valores finitos de z_n são diferentes, então, visto que a seqüência é infinita, algum número z deve aparecer infinitas vezes na seqüência e, por definição, esse número é um ponto-limite da seqüência.

Podemos agora retornar ao caso em que a seqüência contém infinitos termos *diferentes*. Desenhamos um grande quadrado Q_0 que contém todos os z_n. Subdividimos Q_0 em quatro quadrados congruentes, que numeramos como 1, 2, 3, 4. Fica claro que, ao menos um desses quadrados (cada um considerado com seu contorno completo) deve conter infinitos termos da seqüência. Entre esses quadrados, aquele que tiver o menor número (1, 2, 3 ou 4) será chamado de Q_1. Esse é o primeiro passo. No próximo passo, subdividimos Q_1 em quatro quadrados congruentes e selecionamos um quadrado Q_2 pela mesma regra, e assim por diante. Isso resulta numa seqüência infinita de quadrados $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots$ com a propriedade de que o lado de Q_n aproxima-se de zero à medida que n aproxima-se do infinito, e que Q_m contém todo Q_n com $n > m$. Não é difícil ver que o número que pertence a todos esses quadrados,[4] que chamaremos de $z = a$, é um ponto-limite da seqüência. Com efeito, dado um $\epsilon > 0$, podemos escolher um N tão grande que o lado do quadrado Q_N é menor que ϵ e, uma vez que Q_N contém infinitos z_n, temos $|z_n - a| < \epsilon$ para infinitos n. Isso completa a demonstração. ■

[3] BERNARD BOLZANO (1781–1848), matemático austríaco e professor de estudos de religião, foi o pioneiro no estudo de topologias gerais, o fundador da análise, e da matemática lógica.

Para Weierstrass, veja a Seção 15.5.

[4] O fato de que um único número $z = a$ existe parece óbvio, mas, na realidade, isso vem de um axioma do sistema de números reais, chamado de *axioma de Cantor–Dedekind*; veja a nota de rodapé 3 do Apêndice A3.3.

Seção 15.3

PARTE (b) DA PROVA DO TEOREMA 5

Temos que mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1} \right]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \, \Delta z \big[(z + \Delta z)^{n-2} + 2z(z + \Delta z)^{n-3} + \cdots + (n - 1)z^{n-2} \big],$$

portanto,

$$\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1}$$

$$= \Delta z \big[(z + \Delta z)^{n-2} + 2z(z + \Delta z)^{n-3} + \cdots + (n - 1)z^{n-2} \big].$$

Se fizermos $z + \Delta z = b$ e $z = a$, então $\Delta z = b - a$, isso torna-se simplesmente

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} - na^{n-1} = (b - a)A_n \qquad (n = 2, 3, \cdots), \tag{7a}$$

onde A_n é a expressão entre parênteses à direita,

$$A_n = b^{n-2} + 2ab^{n-3} + 3a^2b^{n-4} + \cdots + (n - 1)a^{n-2}; \tag{7b}$$

logo, $A_2 = 1$, $A_3 = b + 2a$ etc. Provemos (7) por indução. Quando $n = 2$, então (7) se verifica, uma vez que, então,

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} - 2a = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} - 2a = b - a = (b - a)A_2.$$

Supondo que (7) se verifica para $n = k$, mostremos também que se verifica para $n = k + 1$. Adicionando e subtraindo um termo no numerador e então dividindo, obtemos primeiramente

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = \frac{b^{k+1} - ba^k + ba^k - a^{k+1}}{b - a} = b \, \frac{b^k - a^k}{b - a} + a^k.$$

Pela hipótese da indução, o lado direito corresponde a $b\big[(b - a)A_k + ka^{k-1}\big] + a^k$. Cálculos diretos mostram que isso é igual a

$$(b - a)\{bA_k + ka^{k-1}\} + aka^{k-1} + a^k.$$

De (7b) com $n = k$, vemos que a expressão entre chaves $\{\cdots\}$ é igual a

$$b^{k-1} + 2ab^{k-2} + \cdots + (k - 1)ba^{k-2} + ka^{k-1} = A_{k+1}.$$

Logo, nosso resultado é

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = (b - a)A_{k+1} + (k + 1)a^k.$$

Tomando o último termo do lado esquerdo, obtemos (7) com $n = k + 1$. Isso prova (7) para qualquer inteiro $n \geqq 2$ e completa a demonstração. ■

Seção 18.2

OUTRA PROVA DO TEOREMA 1 *sem usar o conjugado harmônico*

Mostremos que, se $w = u + iv = f(z)$ for analítica e mapearmos conformalmente um domínio D sobre um domínio D^* e se $\Phi^*(u, v)$ for harmônica em D^*, então

$$\Phi(x, y) = \Phi^*(u(x, y), v(x, y)) \tag{1}$$

será harmônica em D, ou seja, $\nabla^2\Phi = 0$ em D. Não fazemos uso do conjugado harmônico de Φ^*, mas usamos a derivação direta. Pelo regra da cadeia,

$$\Phi_x = \Phi_u{}^* \, u_x + \Phi_v{}^* \, v_x.$$

Aplicamos a regra da cadeia uma vez mais, sublinhando os termos que serão descartados quando formarmos $\nabla^2\Phi$:

$$\Phi_{xx} = \underline{\Phi_u{}^* u_{xx}} + (\Phi^*_{uu} u_x + \underline{\Phi^*_{uv}\, v_x})\, u_x$$
$$+ \underline{\Phi_v{}^* v_{xx}} + (\underline{\Phi^*_{vu}\, u_x} + \Phi^*_{vv} v_x)\, v_x.$$

Φ_{yy} é o mesmo com cada x sendo substituído por y. Formamos a soma $\nabla^2\Phi$. Nela, $\Phi^*_{vu} = \Phi^*_{uv}$ é multiplicado por

$$u_x v_x + u_y v_y$$

que vale 0 pelas equações de Cauchy–Riemann. Além disso, $\nabla^2 u = 0$ e $\nabla^2 v = 0$. Então,

$$\nabla^2\Phi = \Phi^*_{uu}(u_x{}^2 + u_y{}^2) + \Phi^*_{vv}(v_x{}^2 + v_y{}^2).$$

O que, pelas equações de Cauchy–Riemann, torna-se

$$\nabla^2\Phi = (\Phi^*_{uu} + \Phi^*_{vv})(u_x{}^2 + v_x{}^2)$$

que vale 0, uma vez que Φ^* é harmônica. ■

APÊNDICE 5

Tabelas

Para as Tabelas de Transformadas de Laplace, veja as Seções 6.8 e 6.9.

Para as Tabelas de Transformadas de Fourier, veja a Seção 11.10.

Se você dispõe de um Sistema de Álgebra Computacional (SAC), possivelmente não precisará das tabelas aqui mostradas, embora eventualmente elas possam lhe ser convenientes.

Tabela A1 Funções de Bessel

Para tabelas mais completas, veja a Ref. [RG1] no Apêndice 1

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	3,0	−0,2601	0,3391	6,0	0,1506	−0,2767
0,1	0,9975	0,0499	3,1	−0,2921	0,3009	6,1	0,1773	−0,2559
0,2	0,9900	0,0995	3,2	−0,3202	0,2613	6,2	0,2017	−0,2329
0,3	0,9776	0,1483	3,3	−0,3443	0,2207	6,3	0,2238	−0,2081
0,4	0,9604	0,1960	3,4	−0,3643	0,1792	6,4	0,2433	−0,1816
0,5	0,9385	0,2423	3,5	−0,3801	0,1374	6,5	0,2601	−0,1538
0,6	0,9120	0,2867	3,6	−0,3918	0,0955	6,6	0,2740	−0,1250
0,7	0,8812	0,3290	3,7	−0,3992	0,0538	6,7	0,2851	−0,0953
0,8	0,8463	0,3688	3,8	−0,4026	0,0128	6,8	0,2931	−0,0652
0,9	0,8075	0,4059	3,9	−0,4018	−0,0272	6,9	0,2981	−0,0349
1,0	0,7652	0,4401	4,0	−0,3971	−0,0660	7,0	0,3001	−0,0047
1,1	0,7196	0,4709	4,1	−0,3887	−0,1033	7,1	0,2991	0,0252
1,2	0,6711	0,4983	4,2	−0,3766	−0,1386	7,2	0,2951	0,0543
1,3	0,6201	0,5220	4,3	−0,3610	−0,1719	7,3	0,2882	0,0826
1,4	0,5669	0,5419	4,4	−0,3423	−0,2028	7,4	0,2786	0,1096
1,5	0,5118	0,5579	4,5	−0,3205	−0,2311	7,5	0,2663	0,1352
1,6	0,4554	0,5699	4,6	−0,2961	−0,2566	7,6	0,2516	0,1592
1,7	0,3980	0,5778	4,7	−0,2693	−0,2791	7,7	0,2346	0,1813
1,8	0,3400	0,5815	4,8	−0,2404	−0,2985	7,8	0,2154	0,2014
1,9	0,2818	0,5812	4,9	−0,2097	−0,3147	7,9	0,1944	0,2192
2,0	0,2239	0,5767	5,0	−0,1776	−0,3276	8,0	0,1717	0,2346
2,1	0,1666	0,5683	5,1	−0,1443	−0,3371	8,1	0,1475	0,2476
2,2	0,1104	0,5560	5,2	−0,1103	−0,3432	8,2	0,1222	0,2580
2,3	0,0555	0,5399	5,3	−0,0758	−0,3460	8,3	0,0960	0,2657
2,4	0,0025	0,5202	5,4	−0,0412	−0,3453	8,4	0,0692	0,2708
2,5	−0,0484	0,4971	5,5	−0,0068	−0,3414	8,5	0,0419	0,2731
2,6	−0,0968	0,4708	5,6	0,0270	−0,3343	8,6	0,0146	0,2728
2,7	−0,1424	0,4416	5,7	0,0599	−0,3241	8,7	−0,0125	0,2697
2,8	−0,1850	0,4097	5,8	0,0917	−0,3110	8,8	−0,0392	0,2641
2,9	−0,2243	0,3754	5,9	0,1220	−0,2951	8,9	−0,0653	0,2559

$J_0(x) = 0$ para $x = 2{,}40483,\ 5{,}52008,\ 8{,}65373,\ 11{,}7915,\ 14{,}9309,\ 18{,}0711,\ 21{,}2116,\ 24{,}3525,\ 27{,}4935,\ 30{,}6346$

$J_1(x) = 0$ para $x = 3{,}83171,\ 7{,}01559,\ 10{,}1735,\ 13{,}3237,\ 16{,}4706,\ 19{,}6159,\ 22{,}7601,\ 25{,}9037,\ 29{,}0468,\ 32{,}1897$

Tabela A1 ***(continuação)***

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0,0	$-(-\infty)$	$-(-\infty)$	2,5	0,498	0,146	5,0	−0,309	0,148
0,5	−0,445	−1,471	3,0	0,377	0,325	5,5	−0,339	−0,024
1,0	−0,088	−0,781	3,5	0,189	0,410	6,0	−0,288	−0,175
1,5	−0,382	−0,412	4,0	−0,017	0,398	6,5	−0,173	−0,274
2,0	−0,510	−0,107	4,5	−0,195	0,301	7,0	−0,026	−0,303

Tabela A2 **Funções Gama** [veja (24) no Apêndice A3.1]

α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
1,00	1,000 000	1,20	0,918 169	1,40	0,887 264	1,60	0,893 515	1,80	0,931 384
1,02	0,988 844	1,22	0,913 106	1,42	0,886 356	1,62	0,895 924	1,82	0,936 845
1,04	0,978 438	1,24	0,908 521	1,44	0,885 805	1,64	0,898 642	1,84	0,942 612
1,06	0,968 744	1,26	0,904 397	1,46	0,885 604	1,66	0,901 668	1,86	0,948 687
1,08	0,959 725	1,28	0,900 718	1,48	0,885 747	1,68	0,905 001	1,88	0,955 071
1,10	0,951 351	1,30	0,897 471	1,50	0,886 227	1,70	0,908 639	1,90	0,961 766
1,12	0,943 590	1,32	0,894 640	1,52	0,887 039	1,72	0,912 581	1,92	0,968 774
1,14	0,936 416	1,34	0,892 216	1,54	0,888 178	1,74	0,916 826	1,94	0,976 099
1,16	0,929 803	1,36	0,890 185	1,56	0,889 639	1,76	0,921 375	1,96	0,983 743
1,18	0,923 728	1,38	0,888 537	1,58	0,891 420	1,78	0,926 227	1,98	0,991 708
1,20	0,918 169	1,40	0,887 264	1,60	0,893 515	1,80	0,931 384	2,00	1,000 000

Tabela A3 **Função Fatorial e Seu Logaritmo de Base 10**

n	$n!$	log ($n!$)	n	$n!$	log ($n!$)	n	$n!$	log ($n!$)
1	1	0,000 000	6	720	2,857 332	11	39 916 800	7,601 156
2	2	0,301 030	7	5 040	3,702 431	12	479 001 600	8,680 337
3	6	0,778 151	8	40 320	4,605 521	13	6 227 020 800	9,794 280
4	24	1,380 211	9	362 880	5,559 763	14	87 178 291 200	10,940 408
5	120	2,079 181	10	3 628 800	6,559 763	15	1 307 674 368 000	12,116 500

Tabela A4 **Função Erro, Seno e Cosseno Integrais** [veja (35), (40), (42) no Apêndice A3.1]

x	fer x	Si(x)	ci(x)	x	fer x	Si(x)	ci(x)
0,0	0,0000	0,0000	∞	2,0	0,9953	1,6054	−0,4230
0,2	0,2227	0,1996	1,0422	2,2	0,9981	1,6876	−0,3751
0,4	0,4284	0,3965	0,3788	2,4	0,9993	1,7525	−0,3173
0,6	0,6039	0,5881	0,0223	2,6	0,9998	1,8004	−0,2533
0,8	0,7421	0,7721	−0,1983	2,8	0,9999	1,8321	−0,1865
1,0	0,8427	0,9461	−0,3374	3,0	1,0000	1,8487	−0,1196
1,2	0,9103	1,1080	−0,4205	3,2	1,0000	1,8514	−0,0553
1,4	0,9523	1,2562	−0,4620	3,4	1,0000	1,8419	0,0045
1,6	0,9763	1,3892	−0,4717	3,6	1,0000	1,8219	0,0580
1,8	0,9891	1,5058	−0,4568	3,8	1,0000	1,7934	0,1038
2,0	0,9953	1,6054	−0,4230	4,0	1,0000	1,7582	0,1410